

## О практических аспектах вычисления Хаф-образа алгоритмом Брейди-Ёна

М. А. Алиев\*\*, И. А. Кунина\*,\*\* Д. П. Николаев\*,\*\*, Д. В. Полевой\*\*

\* Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

\*\*ООО «Смарт Энджинс Сервис», Москва, Россия

Поступила в редколлегию 15.05.2023

**Аннотация**—В работе рассматриваются практические аспекты использования быстрого преобразования Хафа, понимаемого как быстрый алгоритм вычисления дискретизации преобразования Радона. В рамках краткого исторического экскурса эта интерпретация обосновывается, показывается ее актуальность. В деталях описывается алгоритм Брейди-Ёна вычисления быстрого преобразования Хафа, обсуждается связанная с ним система координат. Описывается способ вычисления с его помощью частичных Хаф-образов, ограниченных диапазонами углов наклона прямых, вдоль которых осуществляется суммация. Наконец, обсуждается перегруппировка Хаф-образа, вычисляемого алгоритмом Брейди-Ёна, позволяющая избежать циклического «перетекания» элементов образа.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** быстрое преобразование Хафа, БПХ, дискретное преобразование Радона, алгоритм Брейди-Ёна, система координат БПХ, частичное вычисление БПХ.

DOI: 10.53921/18195822\_2023\_23\_2\_250

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Обычно под преобразованием Хафа (ПХ) понимают метод робастного оценивания параметров одной или нескольких прямых на дискретном изображении путем подсчета числа точек, лежащих на каждой из множества дискретных прямых. Метод носит имя Пола Хафа, впервые предложившего его в 1959 году [1] и получившего на его основе в 1962 году патент «Методы и средства для распознавания сложных шаблонов» [2]. С тех пор ПХ активно используется как инструмент анализа структуры цифровых изображений в техническом зрении, поскольку прямые являются в этой области одним из базовых примитивов.

В своем патенте П. Хаф предложил использовать преобразование, которое отображает каждую анализируемую точку исходного изображения в определенную прямую на экране осциллографа. Точки, коллинеарные на исходном изображении, будут создавать «узел» на осциллограмме в точке пересечения соответствующих им прямых. Координаты наиболее яркого узла являются параметрами той прямой в исходном пространстве, на которой лежит наибольшее число анализируемых точек. Исходно П. Хаф позиционировал свой метод как способ идентификации треков частиц в пузырьковой камере [1, 2].

Ни в исходной публикации, ни в патенте П. Хафа не приводится формального определения предлагаемого преобразования. Оба текста не содержат ни одной математической формулы. В своем историческом экскурсе об изобретении ПХ авторитетный исследователь в области классического распознавания зрительных образов Питер Харт утверждает [3], что впервые формализацию ПХ, хотя бы частичную, осуществил Азриэль Розенфельд при написании монографии по обработке изображений, изданной в 1969 году (и переведенной на русский язык в 1972-м И. Б. Гуревичем, В. М. Рудаковым и Л. П. Ярославским под редакцией Д. С. Лебе-

дева [4]). В той же работе П. Харт небезосновательно заявляет, что ПХ, повсеместно описываемое в современных учебниках по техническому зрению, – это преобразование, формально введенное в статье Ричарда Дуды и самого П. Харта, опубликованной в 1972 году [5].

Тот факт, что в работах П. Хафа описывается появление на осциллограммах именно прямых, связан с использованием им определенной параметризации прямых в исходном пространстве, а именно – параметризации с угловым коэффициентом ( $y = kx + b$ ). При этом в пространстве параметров прямых  $(k, b)$  множество, соответствующее прямым, проходящим через фиксированную точку  $(x_0, y_0)$  исходного пространства, составляет именно прямую:  $b = -x_0 k + y_0$ . В результате каждая точка исходного пространства «голосует» за прямую параметров прямых – за множество прямых, проходящих через эту точку, а «выигрывает» прямая, набравшая наибольшее число «голосов». Эта параметризация сохранена у А. Розенфельда.

Р. Дуда и П. Харт обратили внимание на то, что при параметризации с угловым коэффициентом для любого размера аккумуляторного пространства строго вертикальные прямые  $x = b$  не будут иметь своего аккумулятора [5]. Поэтому они предложили использовать нормальную параметризацию прямых ( $x \cos \varphi + y \sin \varphi = \rho$ ). Образом точки исходного пространства в аккумуляторном пространстве  $(\rho, \varphi)$  является дискретная синусоида.

ПХ позволяет робастно определять параметры прямой, на которой лежит множество точек на изображении. Но вычислительная сложность метода кажется неоправданно большой. Пусть на входном изображении размера  $n \times n$  отмечено  $k$  точек. Тогда при использовании аккумуляторного изображения с размерами, пропорциональными входному, сложность вычислений составит  $\Theta(kn)$  при требованиях к памяти  $\Theta(n^2)$ . В задачах, в которых плотность точек не меняется при изменении размера изображения ( $k \sim n^2$ ), сложность составит  $\Theta(n^3)$ . Заметим, что большая часть обсуждаемых вычислений происходит при обработке аккумуляторов, далеких от максимума. Неудивительно, что значительная часть исследований по совершенствованию ПХ стала проводиться в направлении построения быстрых методов оценивания координат максимума Хаф-образа без выдвижения требований к точности вычисления Хаф-образа в целом.

В работе [6] Н. Кирьяти, И. Эльдар и А. Брукштейн предложили метод ускорения ПХ, названный ими вероятностным ПХ. Идея вероятностного ПХ довольно проста: если число точек на искомой прямой достаточно велико, то координаты максимума Хаф-образа с высокой вероятностью можно оценить на Хаф-образе равномерной подвыборки входного изображения. Справедливости ради, следует указать, что этот метод был впервые предложен А. Розенфельдом на 19 лет раньше, без введения специального названия [4, гл. 8].

Более интересный метод ускорения был предложен в работе [7] и назван комбинаторным ПХ. Идея Д. Бена-Цви и М. Сэндлера состоит в том, что в искомом пике на аккумуляторном изображении пересекается как минимум две траектории «голосов», поэтому можно рассматривать пары голосующих точек и инкрементировать для каждой пары единственный аккумулятор – соответствующий прямой, проходящей через выбранную пару точек.

Дальше пошли Лэй Сюй с соавторами в своей работе 1990 года [8]. Метод, названный ими рандомизированным ПХ, отличается от комбинаторного тремя дополнительными идеями. Во-первых, аккумуляторное пространство представляет собой в этом варианте список непустых ячеек, а не массив. Это существенно (и об этом авторы говорят явно) для ОПХ, где число оцениваемых параметров (и, соответственно, размерность аккумуляторного пространства) может быть гораздо больше двух. Во-вторых, авторы предложили для ячеек аккумуляторного пространства с надпороговыми значениями определять их истинное значение проверкой всех входных точек на соответствие модели с параметрами, задаваемыми координатами ячейки. В-третьих, авторы предложили удалять из исходного набора точек те, для которых уже установлено соответствие обработанным ячейкам.

Рандомизированное ПХ, безусловно, являлось на момент опубликования революционно новой модификацией ПХ, но в целом предлагаемый метод назвать новым можно только с большой натяжкой. За 9 лет до работы Л. Сюя с соавторами вышла статья Мартина Фишлера и Роберта Боллеса о новой парадигме установления параметров моделей в анализе изображений и картографии – RANSAC (Random Sample Consensus, консенсус случайных выборок) [9]. В этой парадигме в исходном множестве точек многократно выбираются случайные подмножества, позволяющие оценить параметры модели, а число точек, удовлетворяющих модели при этих параметрах, предложено считать оценкой правдоподобия решения, то есть основные идеи двух методов полностью совпадают.

Статья о RANSAC М. Фишлера и Р. Боллеса [9] на начало 2022 года имеет более 25 тыс. цитирований (для сравнения: работа Р. Дуды и П. Харта [5], популяризовавшая ПХ, цитируется менее 10 тыс. раз), то есть эта смежная область вызывает у исследователей значительно больший интерес. В связи с этим можно констатировать, что дальнейшее развитие ПХ, понимаемого как метод оценивания параметров модели, имеет мало перспектив. Однако известна другая интерпретация ПХ, также позволяющая строить ускоренные алгоритмы его вычисления.

В 1981 году Стэнли Динс обратил внимание [10] на чрезвычайное сходство преобразования Хафа и преобразования Радона, введенного последним еще в 1917 году [11]. Главным выводом работы С. Динса является утверждение, что ПХ является частным случаем преобразования Радона. Это утверждение трудно обсуждать, поскольку его прямая аргументация в статье отсутствует, а из двух исследуемых преобразований только преобразование Радона вводится формально. В своем подробном обзоре, посвященном ПХ и опубликованном в 1988 году [12], Дж. Иллингворт и Дж. Киттлер рассматривают, в том числе, упомянутую работу С. Динса. Эти два исследователя формулируют связь преобразований несколько конкретнее. Вслед за С. Динсом они утверждают, что ПХ является частным случаем преобразования Радона, но добавляют, что для бинарных изображений преобразования совпадают. Заметим, что в обзоре, посвященном ПХ, не дается (традиционно для рассматриваемой области науки) его определения. Наконец, в 1992 году Мартин Брейди и Ванки Ён опубликовали свою без преувеличения прорывную работу о быстром приближенном дискретном преобразовании Радона [13]. В ее аннотации и заключении авторы используют названия преобразований Хафа и Радона, как взаимозаменяемые, а во введении указывают (без ссылок и аргументации), что ПХ – это дискретное преобразование Радона от бинарного изображения. Такая позиция не противоречит ни определению преобразования Радона, ни пионерским работам о преобразовании Хафа.

В своей работе [13] М. Брейди и В. Ён предложили метод быстрого вычисления всего образа ПХ (понимаемого как дискретизация преобразования Радона на плоскости), основанный на многократном использовании общих подсумм. Метод Брейди-Ёна позволяет вычислять ПХ за  $\Theta(n^2 \log n)$  суммаций. Через 6 лет М. Брейди еще раз опубликовал описание этого метода, на этот раз – без соавторов [14]. Метод Брейди-Ёна был, по-видимому, независимо разработан также Вальтером Гётцем, опубликовавшим его в своей диссертационной работе в 1993 году на немецком языке. Эта работа переизлагается в англоязычной статье В. Гётца и Х. Дрюкмюллера, опубликованной дважды (в 1995 и 1996 году) в одном и том же журнале [15, 16]. Два варианта статьи идентичны не полностью, но на первый взгляд их различия весьма незначительны. Примечание на первой странице более позднего варианта гласит, что статья уже была опубликована ранее. К сожалению, это никак не проясняет причин произошедшего. Еще одним автором, опубликовавшим тот же метод, стал в 1994 году известный французский алгоритмист Жан Виймен [17]. Однако все упомянутые здесь работы вышли позднее, чем у М. Брейди и В. Ёна, поэтому в данной работе метод называется по именам последних. Именно

этот многократно изобретенный метод мы и будем называть быстрым преобразованием Хафа (БПХ).

На сегодняшний день БПХ имеет число приложений едва ли меньшее, чем быстрое преобразование Фурье. В качестве примеров областей использования БПХ, весьма далеких от поиска отрезков, приведем бинаризацию [18] и сегментацию [19] изображений, а также задачу автоматического определения параметров оптических aberrаций [20] и задачу ортогональной робастной линейной регрессии на маломерных гистограммах [21].

Использование быстрых алгоритмов тем более оправдано, чем выше требования к их вычислительной эффективности. К зрительным системам беспилотного транспорта предъявляются особенно жесткие требования по быстродействию. Поэтому быстрые алгоритмы вычисления ПХ стали практически неотъемлемой частью таких систем. Чаще всего они применяются для поиска элементов дорожной разметки [22, 23, 24], причем многие авторы создают алгоритмы, предназначенные для встраиваемых устройств [25, 26, 27]. Также быстрые алгоритмы вычисления ПХ могут использоваться для прослеживания колес автомобилей [28] или в системах анализа транспортных потоков [29].

Проблема энергоэффективности является ключевой и для систем, работающих на мобильных устройствах [30], и в них также активно применяется БПХ. Системы распознавания документов используют его для поиска четырехугольника документа [31] или для поиска паттернов, состоящих из параллельных отрезков. Алгоритмы поиска параллельных пучков, использующие ПХ, позволяют найти наклон документа на изображении [32], текстовой строки [33] или отдельных символов в ней [34]. Еще одной задачей распознавания на мобильных устройствах, в которой применяется ПХ, является обнаружение штрихкодов [35].

По несколько иным причинам БПХ используется в вычислительной рентгеновской томографии [36, 37, 38]. Здесь при значительных привлекаемых вычислительных ресурсах до сих пор не достигнуты желаемые параметры разрешения реконструкции, то есть объемы обрабатываемых данных постоянно растут, что при использовании асимптотически неэффективных алгоритмов рано или поздно приводит к нехватке ресурсов. Кроме того, задача ускорения реконструкции крайне актуальна для нового класса онлайн-методов, позволяющих в режиме реального времени оценить и скорректировать параметры томографических измерений [39].

Следует также отметить, что использование классических алгоритмов с ПХ не противоречит развитию нейросетевых методов, а позволяет сделать их более эффективными с вычислительной точки зрения. На сегодняшний день новым направлением в распознавании является построение так называемых Хаф-сетей на основе классических сверточных. В состав таких сетей включается необучаемый слой, вычисляющий БПХ. Этот слой позволяет извлекать информацию о прямых и отрезках на изображении даже при условии небольшого размера рецептивных полей сверточных нейронов, в отличие от классических сверточных слоев, которые способны при таком количестве слоев и связей анализировать лишь локальные признаки [40, 41, 42]. Проще всего этот эффект демонстрируется при сравнении нейросетевых методов поиска отрезков [43]. Но и в серьезных практических задачах [44] использование Хаф-архитектур также позволяет улучшить соотношение точности распознавания и требуемого объема вычислений.

Итак, использование БПХ, понимаемого как метод Брейди-Ёна, весьма актуально в современной обработке изображений и техническом зрении. При этом применение этого метода нельзя считать тривиальным: в нем используется не нормальная параметризация прямых, предложенная Дудой и Хартом, а параметризация с угловым коэффициентом, причем такой выбор диктуется внутренней симметрией задачи по сокращению числа суммаций. В этой параметризации, как было указано выше, нельзя отобразить исходное изображение на конечную область, поэтому Хаф-образ строится как набор нескольких областей с разной системой координат. Кроме того, БПХ не позволяет быстро строить произвольную область Хаф-образа, а

во многих задачах это желательно, поскольку заранее известны границы, в которые должно укладываться решение. Способам преодоления этих практических затруднений при использовании БПХ и посвящена данная статья. Она структурирована следующим образом. В первой части подробно рассматривается система координат БПХ, а также способ построения единого Хаф-образа. Во второй части описан способ вычисления на изображении сумм по прямым, углы наклона которых лежат в заданном диапазоне. В третьей части описывается операция *fftshift* перегруппировки БПХ-образа вокруг центра аккумулятора, позволяющая избежать «перетекания» Хаф-образа.

## 2. АЛГОРИТМ БРЕЙДИ-ЁНА ВЫЧИСЛЕНИЯ БПХ И ЕГО СВОЙСТВА

### 2.1. Алгоритм Брейди-Ёна и используемая им система координат

Алгоритм, предложенный М. Брейди и В. Ёном в работе [13], имеет две существенные особенности. Во-первых, для получения с его помощью полного Хаф-образа требуется независимое вычисление 4 частей образа, различающихся диапазонами направлений прямых, вдоль которых суммируются значения исходного изображения. Во-вторых, алгоритм вводится для квадратных изображений размера  $2^N \times 2^N$ .

Модификация алгоритма Брейди-Ёна для изображения произвольных размеров впервые предложена в 2012 году [45], но эта модификация основывается на разложении размеров растра на множители и не эффективна в случае размеров, содержащих в разложении большие простые сомножители. Универсальное обобщение алгоритма опубликовано в 2021 году в работе [46]. Этот вариант алгоритма сохраняет схему и асимптотическую сложность алгоритма Брейди-Ёна. Далее рассматривается классический алгоритм Брейди-Ёна и для простоты изложения считается, что размеры изображения  $I_{w,h}$  являются степенями двойки, то есть  $w = 2^W, h = 2^H, W, H \in \mathbb{N}$ .

Введем декартову систему координат (ДСК) для формального определения диапазонов направлений прямых, вдоль которых рассчитываются суммы. Пусть оси  $Ox$  и  $Oy$  ДСК  $Oxy$  направлены слева направо и сверху вниз. Прямая  $p$  в нормальной параметризации задается расстоянием  $\rho$  от точки  $O$  до прямой  $p$  и углом  $\varphi$  между нормалью к прямой  $p$  и осью абсцисс  $Ox$ , измеренным по часовой стрелке.

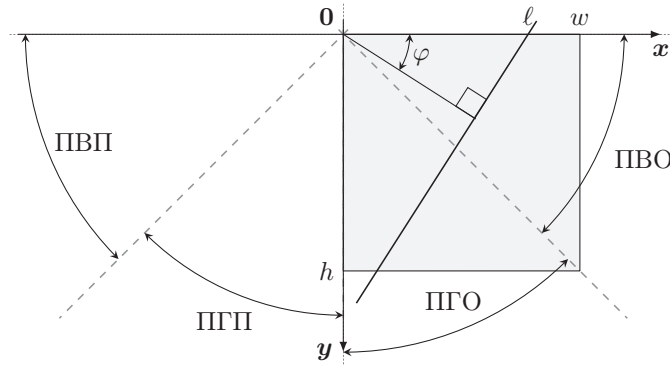
Единократно вычисляемые алгоритмом Брейди-Ёна части БПХ-образа определяются углом  $\varphi$  наклона прямых, отображаемых в соответствующую область. Будем называть преимущественно горизонтальными прямыми, которые можно задать уравнением  $y = kx + b$  с ограниченным угловым коэффициентом  $k \in [-1, 1]$ . Таким прямым соответствует диапазон  $\varphi \in [45^\circ, 135^\circ]$ . Прочие прямые будем называть преимущественно вертикальными. Им соответствует диапазон  $\varphi \in [-45^\circ, 45^\circ]$  и уравнения вида  $x = ky + b$  с ограниченным угловым коэффициентом  $k \in [-1, 1]$ .

В каждом из этих множеств прямых введем дополнительное разделение по знаку  $k$ . Будем говорить о прямой, что она имеет положительный наклон, если  $k \geq 0$  и отрицательный – если  $k \leq 0$ . Комбинируя две классификации, будем называть прямую преимущественно вертикальной с отрицательным наклоном (ПВО), если ее  $\varphi \in [0^\circ, 45^\circ]$ . Аналогично будем называть три оставшихся угловых диапазона как ПВП, ПГО и ПГП. Эти диапазоны будем также называть квадрантами. В табл. 1 приведено соответствие такой классификации диапазонам углов нормальной параметризации прямых.

**Таблица 1.** Диапазоны вычисления БПХ и типизация прямых по направлениям

| диапазон $\varphi$                                | квадрант | преимущественное направление | наклон        | обозначение |
|---|----------|------------------------------|---------------|-------------|
| $[315^\circ, 0^\circ]$ или $[-45^\circ, 0^\circ]$ | ПВП      | вертикальное                 | положительный | VP          |
| $[0^\circ, 45^\circ]$                             | ПВО      | вертикальное                 | отрицательный | VN          |
| $[45^\circ, 90^\circ]$                            | ПГО      | горизонтальное               | отрицательный | HN          |
| $[90^\circ, 135^\circ]$                           | ПГП      | горизонтальное               | положительный | HP          |

На рис. 1 показано расположение введенных диапазонов в нормальной системе координат.



**Рис. 1.** Иллюстрация используемой системы координат, нормальной параметризации прямых, угловых диапазонов и пример преимущественно вертикальной прямой  $\ell$  с отрицательным наклоном

Алгоритм Брейди-Ёна единократно вычисляет суммы вдоль дискретизаций прямых, принадлежащих одному любому из указанных диапазонов. Для формализации дискретизации прямой обозначим  $\Omega = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  и  $\Omega_{w,h} = \mathbb{Z}_{0,w-1} \times \mathbb{Z}_{0,h-1}$ ,  $\Omega_{w,h} \subset \Omega$ . Изображением  $I_{w,h}$  ширины  $w \in \mathbb{N}$  и высоты  $h \in \mathbb{N}$  будем называть отображение  $I_{w,h} : \Omega_{w,h} \rightarrow (G, +)$ , где область определения  $\Omega_{w,h}$  назовем растром, а  $(G, +)$  – абелева группа значений пикселей. Пикселем назовем кортеж  $\langle (x, y), g \rangle$ , где  $(x, y) \in \Omega_{w,h}$  – координаты пикселя,  $g = I_{w,h}(x, y) \in (G, +)$  – значение пикселя. Без ограничения общности доопределим изображение вне растра  $I_{w,h}(x, y) = 0 \forall (x, y) \in \Omega/\Omega_{w,h}$ .

Начало ДСК  $Oxy$  точку  $O$  поместим в центр элемента растра с координатами  $(0, 0) \in \Omega$ . Дискретная прямая (прямолинейный паттерн) – множество координат пикселей  $p(\ell) \subset \Omega$ , аппроксимирующее непрерывную прямую  $\ell$ . В алгоритме Брейди-Ёна непрерывные прямые аппроксимируются дискретными прямолинейными диадическими паттернами [47], которые далее по тексту будем называть кратко «паттерн».

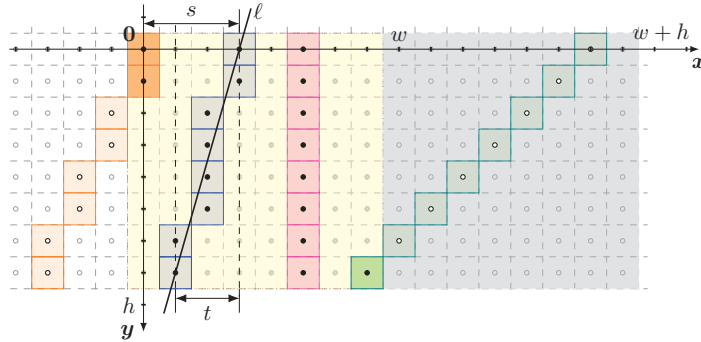
Сумма по паттерну  $p$  на изображении  $I_{w,h}$  вычисляется как сумма значений пикселей в позициях, принадлежащих паттерну

$$\Sigma(p, I_{w,h}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(x,y) \in p} I_{w,h}(x, y).$$

Далее по тексту не различаются паттерны-отрезки и паттерн-прямая, если они совпадают в области растра, поскольку часть паттерна вне растра не влияет на сумму по паттерну. Каждый паттерн  $p_E^B$  является единственным для заданной пары координат его двух крайних пикселей (концов)  $B, E \in \Omega$ . Паттерны удобно задавать в целочисленной  $st$ -параметризации [48].

Рассмотрим  $st$ -параметризацию в квадранте ПВО для растра  $\Omega_{w,h}$ . Пусть непрерывная прямая  $\ell$  проходит через точки  $(s, 0)$  и  $(s - t, h - 1)$ , что соответствует уравнению прямой

$x(y) = s - \frac{t}{h-1}y$ . Прямую  $\ell$  аппроксимирует ПВО-паттерн (см. рис. 2), который обозначим  $p_{w,h}^{VN}(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} p_{(s-t, h-1)}^{(s,0)}$ , где  $s, t \in \mathbb{Z}$  – сдвиг и наклон паттерна.



**Рис. 2.** Иллюстрация  $st$ -параметризации в квадранте ПВО для растра  $\Omega_{8,8}$ : пример прямой  $\ell$  и паттернов  $p_{8,8}^{VN}(0, 3)$  – оранжевый,  $p_{8,8}^{VN}(3, 2)$  – голубой,  $p_{8,8}^{VN}(5, 0)$  – розовый и  $p_{8,8}^{VN}(14, 7)$  – зелёный

БПХ-образом  $H_{I_{w,h}}^{VN}$  исходного изображения  $I_{w,h}$  для квадранта ПВО назовем изображение, каждый пиксель которого с координатами  $(s, t)$  содержит сумму по паттерну  $p_{w,h}^{VN}(s, t)$  на исходном изображении  $I_{w,h}$ , то есть

$$H_{I_{w,h}}^{VN}(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma(p_{w,h}^{VN}(s, t), I_{w,h}).$$

Для квадранта ПВО  $st$ -координаты пересекающихся растр паттернов  $p_{w,h}^{VN}(s, t) \cap \Omega_{w,h} \neq \emptyset$  определяют  $\omega_{w,h}^{VN-V}$ , множество координат пикселей значащей части БПХ-образа

$$\omega_{w,h}^{VN-V} \stackrel{\text{def}}{=} \{(s, t) \in \Omega : s \in [0, w + h - 2] \subset \mathbb{Z}, t \in [\max(0, s - w + 1), h - 1] \subset \mathbb{Z}\}. \quad (1)$$

ПВО-паттерны для которых  $s = w + h - 1$  не пересекают исходный растр  $\Omega_{w,h}$ , но традиционно включаются в рассмотрение, поэтому в качестве растра БПХ-образа будем рассматривать расширенный растр

$$\Omega_{w,h}^E \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{w+h,h}.$$

Незначащей частью БПХ-образа  $\omega^{VN-Z}$  назовем множество пикселей расширенного растра, которые всегда содержат нулевые значения

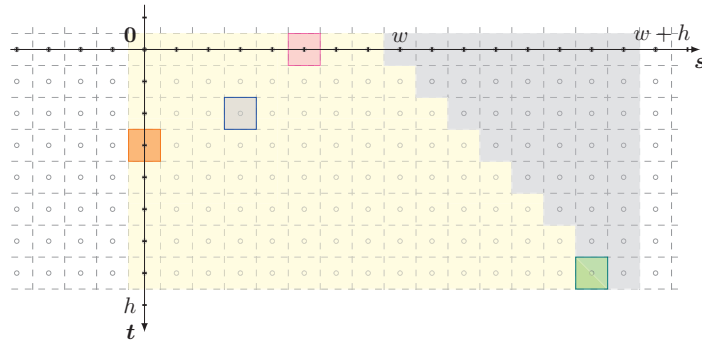
$$\omega^{VN-Z} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{w,h}^E \setminus \Omega_{w,h}^{VN-V}. \quad (2)$$

Изображение  $I_{w,h}^E \stackrel{\text{def}}{=} I_{w+h,h}$  назовем дополненным, а дополнением  $I_{w,h}^Z \stackrel{\text{def}}{=} I_{w+h,h} \setminus I_{w,h}$  (нулями справа) назовем изображение  $I_{w,h}^Z \stackrel{\text{def}}{=} I_{w+h,h} \setminus I_{w,h}$ .

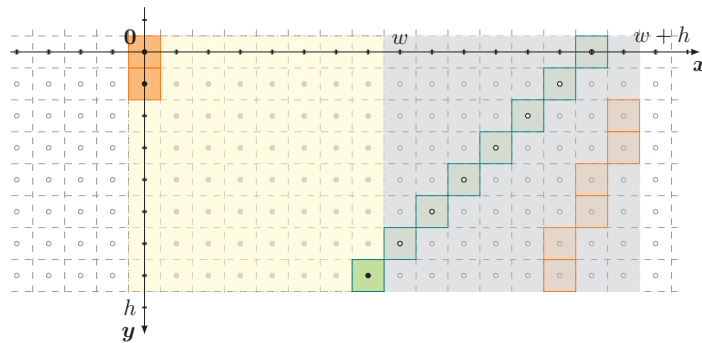
Значения  $s$  и  $t$  далее будем рассматриваем в качестве координат ДСК  $Ost$ , для которой оси  $Os$  и  $Ot$  направлены слева направо и сверху вниз (см. рис. 3).

Для реализации единой схемы суммирования значений пикселей по паттернам в алгоритме Брейди-Ёна  $x$ -координата пикселей паттерна берется по модулю  $w + h$ , поэтому для суммирования по паттернам достаточно дополненного изображения  $I_{w,h}^E$  (см. рис. 4).

В оригинальных работах Брейди [13, 14] описывается только алгоритм 1 для вычисления суммы по всем паттернам ПВО квадранта, который получает на вход квадратное изображение  $I_{n,n}, n = 2^N, N \in \mathbb{N}$  и за  $2n^2 \log_2 n$  сложений вычисляет  $H_{I_{w,h}}^{VN}$ .



**Рис. 3.** Иллюстрация для растра  $\Omega_{s,s}$  в квадранте ПВО значащих пикселей БПХ-образа  $H^{VN}$  – песочный, в т.ч.  $H_{I_{s,s}}^{VN}(0, 3)$  – оранжевый,  $H_{I_{s,s}}^{VN}(3, 2)$  – голубой,  $H_{I_{s,s}}^{VN}(5, 0)$  – розовый и  $H_{I_{s,s}}^{VN}(14, 7)$  – зелёный и незначащих пикселей БПХ-образа  $\omega^{VN-z}$  – серый



**Рис. 4.** Иллюстрация для растра  $\Omega_{s,s}$  в квадранте ПВО схемы суммирования для выходящих за границы исходного растра с использованием дополнения и циклического сдвига

**Алгоритм 1** Вычисление БПХ для ПВО прямых (алгоритм Брейди-Ёна, цитируется по [14] с переобозначениями)

```

1: procedure БПХБ( $I_{n,n}, n$ )
2:    $R_0(x, y, 0) \leftarrow I_{n,n}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_{0,n-1}, y \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$ 
3:    $R_0(x, y, 0) \leftarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}_{n,2n-1}, y \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$ 
4:   for  $i = 1$  to  $\log_2 n$  do
5:     for  $t = 0$  to  $2^i - 1$  do
6:       for  $j = 0$  to  $n - 2^i$  step  $2^i$  do
7:         for  $s = 0$  to  $2n - 1$  do
8:            $s_2 \leftarrow (s - \lceil t/2 \rceil) \bmod 2n$ 
9:            $j_2 \leftarrow j + 2^{i-1}$ 
10:           $R_i(s, j, t) \leftarrow R_{i-1}(s, j, \lceil t/2 \rceil) + R_{i-1}(s_2, j_2, \lceil t/2 \rceil)$ 
11:    $H_I^{VN}(s, t) = R_{\log_2 n}(s, 0, t) \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{0,2n-1}, t \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$ 
12:   return  $H_I$ 

```

- ▷ копирование значений пикселей
- ▷ дополнение нулями справа
- ▷ по величине основания паттернов
- ▷ по величине наклона
- ▷ по сдвигу начала по  $Oy$
- ▷ по сдвигу начала по  $Ox$
- ▷ циклический сдвиг
- ▷ сохранение результата



Рассчитывать суммы вдоль прямых из других (отличных от ПВО) квадрантов авторы предлагают с помощью симметричных вариантов алгоритма, но не дают точных указаний. Для выбора конкретного варианта алгоритмов рассмотрим параметризацию прямых и  $st$ -параметризацию паттернов для всех квадрантов (таблица 2).

**Таблица 2.** Параметризация непрерывных прямых и линейных паттернов по направлениям

| квадрант | уравнение непрерывной прямой | координаты крайних пикселей паттерна |
|----------|------------------------------|--------------------------------------|
| ПВО      | $x(y) = s - \frac{t}{h-1}y$  | $(s, 0)$<br>$(s-t, h-1)$             |
| ПВП      | $x(y) = s + \frac{t}{h-1}y$  | $(s, 0)$<br>$(s+t, h-1)$             |
| ПГО      | $y(x) = s - \frac{t}{w-1}x$  | $(0, s)$<br>$(w-1, s-t)$             |
| ПГП      | $y(x) = s + \frac{t}{w-1}x$  | $(0, s)$<br>$(w-1, s+t)$             |

Из таблицы 2 видно, что при замене координат вида  $-t \rightarrow t'$  преимущественно вертикальная прямая меняет тип наклона и переходит из квадранта ПВО в квадрант ПВП (или наоборот). Таким образом для суммирования вдоль паттернов в квадранте ПВП и вычисления БПХ-образа  $H_{I_{w,h}}^{VP}$  достаточно изменить знак с «-» на «+» при расчете значения  $s_2$  в строке 8 алгоритма 1.

Замена координат вида  $(x, y) \rightarrow (y', x')$  переводит прямые из квадранта ПВО в квадрант ПГО, из ПВП – в ПГП (и обратно). В то же время это соответствует изменению порядка индексирования для  $\Omega$  и транспонированию изображения

$$I_{h,w}^T(y, x) \stackrel{\text{def}}{=} I_{w,h}(x, y).$$

Таким образом, БПХ-образы для квадрантов ПГО и ПГП могут быть вычислены как БПХ-образы для квадрантов ПВО и ПВП от транспонированного входного изображения

$$H_{I_{w,h}}^{HP} \stackrel{\text{def}}{=} H_{I_{h,w}^T}^{VP},$$

$$H_{I_{w,h}}^{HN} \stackrel{\text{def}}{=} H_{I_{h,w}^T}^{VN}.$$

Транспонирование БПХ-образа не производится по причинам, которые будут изложены далее в разделе 2.4, а использование координат пикселей такого БПХ-образа для квадрантов ПГО и ПГП происходит с учетом изменения порядка осей.

Отметим, что для всех квадрантов ширина дополненного растра  $w + h$ . Для квадрантов ПГО и ПГП высота дополненного растра  $w$ . Количество сложений необходимых для вычисления БПХ-образа по всем направлениям (для полного диапазона углов) с использованием алгоритма Брейди-Ёна составляет

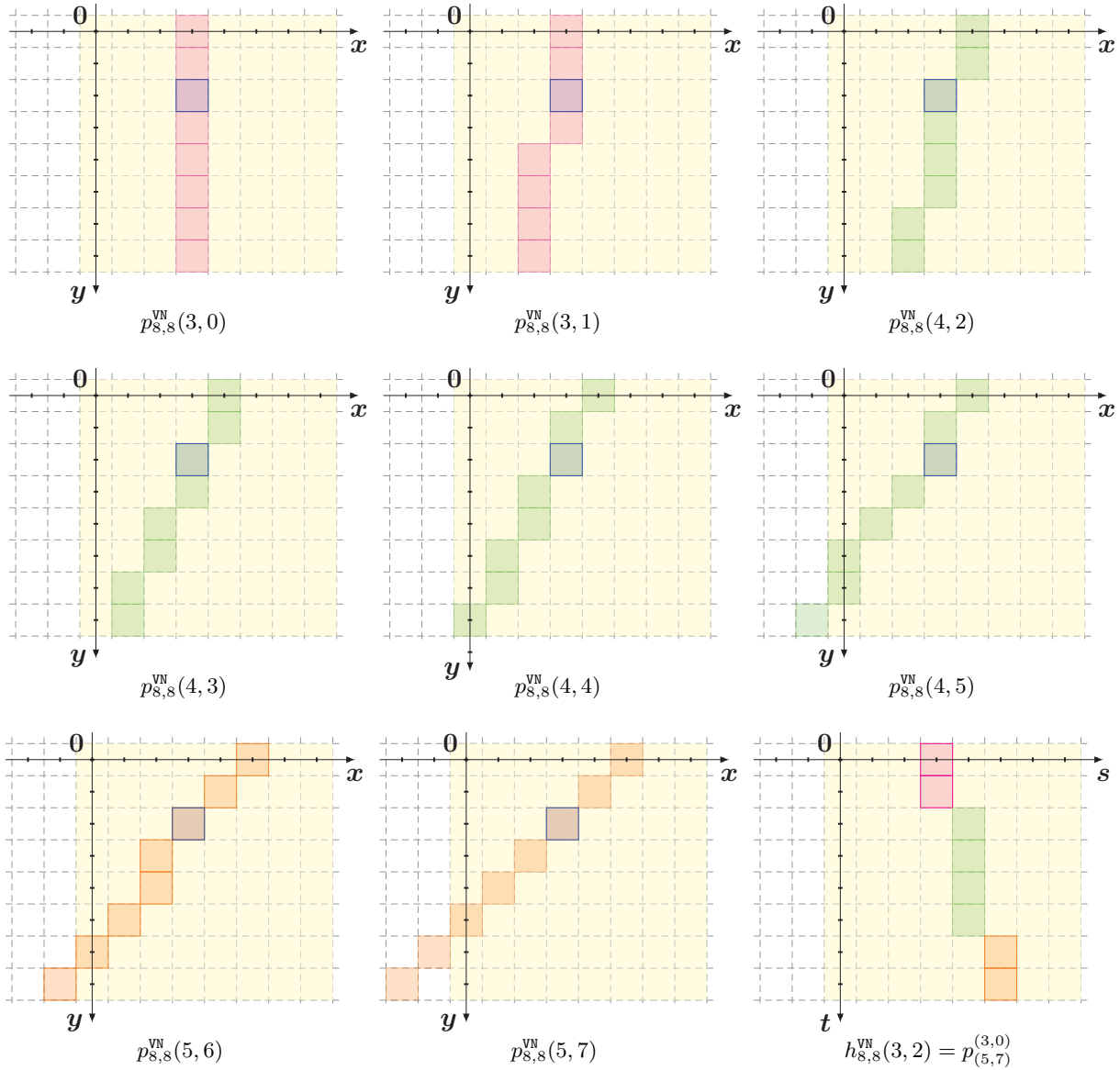
$$OpCnt = 2(h + w)(h \log_2 h + w \log_2 w).$$

## 2.2. Образ одного пикселя на отображении, построенном БПХ

По построению алгоритм Брейди-Ёна в каждый пиксель результата записывает сумму, вычисленную по тому или иному диадическому паттерну. Но не очевидно, какой паттерн заполнения результата соответствует единственному ненулевому пикселю входного изображения. Проясним этот вопрос.

Множество  $st$ -координат всех проходящих через точку  $(x, y) \in \Omega_{w,h}$  паттернов назовем БПХ-образом точки растра (см. рис. 5) и обозначим

$$h_{w,h}^{VN}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{(s, t) \in \Omega_{w,h}^+ : (x, y) \in p_{w,h}^{VN}(s, t)\}.$$



**Рис. 5.** Иллюстрация для точки  $(3,2)$  растра  $\Omega_{8,8}$  в ПВО квадранте проходящих через эту точку паттернов и БПХ-образа  $h_{8,8}^{VN}(3,2)$

В работе [14] доказывается, что элементы  $h_{w,h}^{VN}(x, y)$  лежат на проходящей через точки  $(x, 0)$  и  $(x + y, h - 1)$  дискретной прямой и без доказательства утверждается, что это линейный диадический паттерн. Доказательство соответствия  $h_{w,h}^{VN}(x, y) = p_{(x+y, h-1)}^{(x,0)}$  можно найти в работах [49, 40].

2.3. Параметризация точки БПХ-образа прямой исходного пространства

Одним из классических применений ПХ является робастная оценка параметров отдельных прямых или пучков прямых на плоскости. Для решения этой задачи строится БПХ-образ и определяются координаты пикселей с экстремальными значениями на нем.  $st$ -координаты пикселя определяют патерн-прообраз и соответствующую ему непрерывную прямую-прообраз в исходной ДСК  $Oxy$ . На практике проходящую через растр непрерывную прямую удобно параметризовать координатами двух точек на границе этого растра (см. рис. 6.а).

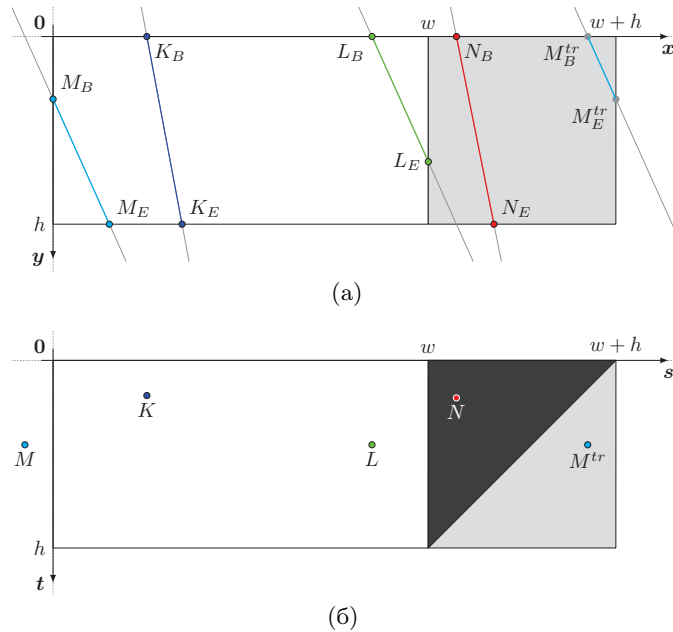


Рис. 6. Схема суммирования для ПВП прямых (а) дополненный нулями справа растр и примеры проходящих через пары точек на границах растра прямых, (б) БПХ-образ с отмеченными точками-образами

Возникает вопрос, как для заданных  $st$ -координат пикселя БПХ-образа восстановить координаты пары точек на границе исходного растра. Далее на примере ПВП прямых рассмотрим особенности построения БПХ-образа алгоритмом 1 и сформулируем отвечающий на поставленный вопрос алгоритм.

При расчете БПХ-образа в квадранте ПВП исходное изображение дополняется нулями справа. Учитывая циклический сдвиг по аналогии с (1) и (2) множество  $\omega_{w,h}^{VP-Z}$  координат пикселей незначущей части БПХ-образа имеет вид

$$\omega_{w,h}^{VP-Z} = \{(s, t) \in \Omega : s \in [w, w + h - 1] \subset \mathbb{Z}, t \in [0, h + w - s - 1] \subset \mathbb{Z}\},$$

а значащая часть БПХ-образа

$$\omega_{w,h}^{VP-V} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{w,h}^E \setminus \omega_{w,h}^{VP-Z}.$$

Пересекающие только горизонтальные границы дополнения растра и не пересекающие вертикальные границы области дополнения прямые из ПВП квадранта отображаются в  $\omega_{w,h}^{VP-Z}$  (например прямая  $N_B N_E$  отображается в точку  $N$ ).

Если прямая из ПВП квадранта пересекает обе горизонтальные или верхнюю и правую границы растра (такие как  $K_B K_E$  и  $L_B L_E$ ), то БПХ-образы этих прямых (точки  $K$  и  $L$ ) лежат в пределах границ исходного растра. Для пересекающих левую границу исходного растра прямых вида  $M_B M_E$  выполняется  $s < 0$ , поэтому при циклическом сдвиге  $s$ -координата вычисляется по формуле  $s^{tr} = w + h - s$ , а БПХ-образ  $M^{tr}$  попадает в  $\omega_{w,h}^{VP-V}$ .

Алгоритм 2 учитывает рассмотренные выше варианты и строит для квадранта ПВП отображение  $(s, t)$ -координат точки БПХ-образа в пару координат точек  $(x_B, y_B)$  и  $(x_E, y_E)$  на границах исходного растра. Координаты точки из незначащей части БПХ-образа  $\omega_{w,h}^{VP-Z}$  считаются некорректными входными данными и приводят к отказу (строка 18).

---

**Алгоритм 2** Определение параметров ПВП прямой исходного пространства, которая соответствует координатам точки БПХ-образа в  $st$ -координатах

---

**Require:**  $w = 2^W, h = 2^H, W, H \in \mathbb{N}, s \in [0, w + h - 1] \subset \mathbb{Z}, t \in [0, h - 1] \subset \mathbb{Z}$

```

1: procedure ТочПВП( $w, h, s, t$ )
2:   if  $s < w$  then                                     ▷ прямая пересекает верхнюю границу растра
3:      $x_B \leftarrow s$ 
4:      $y_B \leftarrow 0$ 
5:     if  $s + t < w$  then                               ▷ прямая пересекает нижнюю границу растра
6:        $x_E \leftarrow s + t$ 
7:        $y_E \leftarrow h - 1$ 
8:     else if  $w \leq s + t$  then                       ▷ прямая пересекает правую границу растра
9:        $x_E \leftarrow w - 1$ 
10:       $y_E \leftarrow (h - 1) \frac{w-s}{t+1}$ 
11:    else if  $w \leq s$  then                             ▷ прямая не пересекает верхнюю границу растра
12:       $x_E \leftarrow s + t - (w + h)$                  ▷ циклический сдвиг на  $w + h$ 
13:       $y_E \leftarrow h - 1$ 
14:    if  $w + h \leq s + t$  then                         ▷ начало сегмента на левой стороне растра
15:       $x_B \leftarrow 0$ 
16:       $y_B \leftarrow (h - 1) \frac{w+h-s}{t+1}$ 
17:    else if  $s + t < w + h$  then                     ▷ ответ вне исходного изображения
18:      throw exception                                ▷ отказ
19:    return  $(x_B, y_B), (x_E, y_E)$ 

```

---

Проведя аналогичные рассуждения для прямых и БПХ-образа в квадранте ПВО можно сформулировать алгоритм 3.

---

**Алгоритм 3** Определение параметров непрерывной ПВО прямой исходного пространства, которая соответствует координатам точки БПХ-образа в  $st$ -координатах

---

**Require:**  $w = 2^W, h = 2^H, W, H \in \mathbb{N}, s \in [0, w + h - 1] \subset \mathbb{Z}, t \in [0, h - 1] \in \mathbb{Z}$

```

1: procedure ТочПВО( $w, h, s, t$ )
2:   if  $s < w$  then                                     ▷ прямая пересекает верхнюю границу растра
3:      $x_B \leftarrow s$ 
4:      $y_B \leftarrow 0$ 
5:     if  $0 \leq s - t$  then                               ▷ прямая пересекает нижнюю границу растра
6:        $x_E \leftarrow s - t$ 
7:        $y_E \leftarrow h - 1$ 
8:     else if  $s - t < 0$  then                           ▷ прямая пересекает левую границу растра
9:        $x_E \leftarrow 0$ 
10:       $y_E \leftarrow (h - 1) \frac{s}{t+1}$ 
11:    else if  $w \leq s$  then                             ▷ прямая не пересекает верхнюю границу растра
12:       $x_E \leftarrow s - t$ 
13:       $y_E \leftarrow h - 1$ 
14:    if  $s - t < w$  then                                 ▷ начало сегмента на правой стороне растра
15:       $x_B \leftarrow w - 1$ 
16:       $y_B \leftarrow (h - 1) \frac{s-w+1}{t+1}$ 
17:    else if  $w \leq s - t$  then                         ▷ ответ вне исходного изображения
18:      throw exception                                ▷ отказ
19:    return  $(x_B, y_B), (x_E, y_E)$ 

```

---

## 2.4. БПХ для полного диапазона углов (схема склейки)

Если анализ изображения требует вычисления БПХ для нескольких смежных квадрантов, то одним из вариантов представления результата является полный БПХ-образ, формируемый при помощи «склейки» БПХ-образов для отдельных квадрантов [50, 18, 51]. Схема формирования полного БПХ образа размера  $3n \times 4n$  без подробного описания приведена в работе [50]. В работе [51] предлагается модификация алгоритма Брейди-Ёна, которая вычисляет полный БПХ-образ размера  $n \times 4n$  за счет игнорирования примерно 15% пикселей в окрестностях углов исходного растра.

Альтернативный вариант формирования полного БПХ-образа размера  $2n \times (4n - 3)$  излагается в работе [18]. БПХ-образы квадрантов предлагается конкатенировать вдоль общих крайних строк, для чего выбирается определенный порядок направлений (например ПВП, ПВО, ПГО, ПГП) и для двух направлений перед конкатенацией БПХ-образы зеркально отражаются вертикально относительно оси  $Os$  (например, ПВП и ПГО). Координаты пикселей полного БПХ-образа будем рассматривать в ДСК  $Ost$ , начало которой совпадает с верхним левым углом растра и имеет стандартную ориентацию осей (см. рис. 7), далее такая ДСК может использоваться для оценки параметров прямых, как будет показано далее в алгоритме 4.

Покажем, что образом точки на полном БПХ-образе является непрерывная, с точностью до циклического сдвига, двузвенная ломаная. Пусть конкатенируются БПХ-образы квадрантов ПВП и ПВО. Рассмотрим точку  $P_I = (x_p, y_p) \in \Omega_{w,h}$  на исходном изображении  $I$ . Ее образом для квадранта ПВП будет отрезок с концами в точках  $(x_p, 0)$  и  $(x_p - y_p, h - 1)$ . Уравнение проходящей через эти точки прямой

$$s(t) = x_p - \frac{y_p}{h-1}t.$$

Перед конкатенацией БПХ-образ квадранта ПВП отражается относительно горизонтальной оси  $Os$ , поэтому для получения уравнения прямой в ДСК  $Ost$  полного БПХ-образа сделаем замену  $t = h - 1 - t_{new}$  и получим

$$s(t_{new}) = x_p - \frac{y_p}{h-1}(h-1-t_{new}).$$

Упростив

$$s(t_{new}) = x_p - y_p + \frac{y_p}{h-1}t_{new}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим образ точки  $P_I$  для квадранта ПВО – отрезок с концами в точках  $(x_p, 0)$  и  $(x_p + y_p, h - 1)$ . Уравнение прямой

$$s(t) = x_p + \frac{y_p}{h-1}t.$$

При конкатенации БПХ-образ для ПВО сегмента сдвигается вдоль оси  $Ot$  на  $h - 1$ , поэтому для получения уравнения прямой в ДСК  $Ost$  полного БПХ-образа сделаем замену  $t = t_{new} - (h - 1)$  и получим

$$s(t_{new}) = x_p + \frac{y_p}{h-1}(t_{new} - (h - 1)).$$

Упростив

$$s(t_{new}) = x_p - y_p + \frac{y_p}{h-1}t_{new}. \quad (4)$$

Таким образом мы показали, что на сконкатенированных БПХ-образах квадрантов ПВП и ПВО образом точки  $P_I$  является отрезок, поскольку (3) и (4) идентичны.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в предложенной схеме для пары квадрантов ПГО и ПГП образом точки исходного пространства является отрезок, один из концов

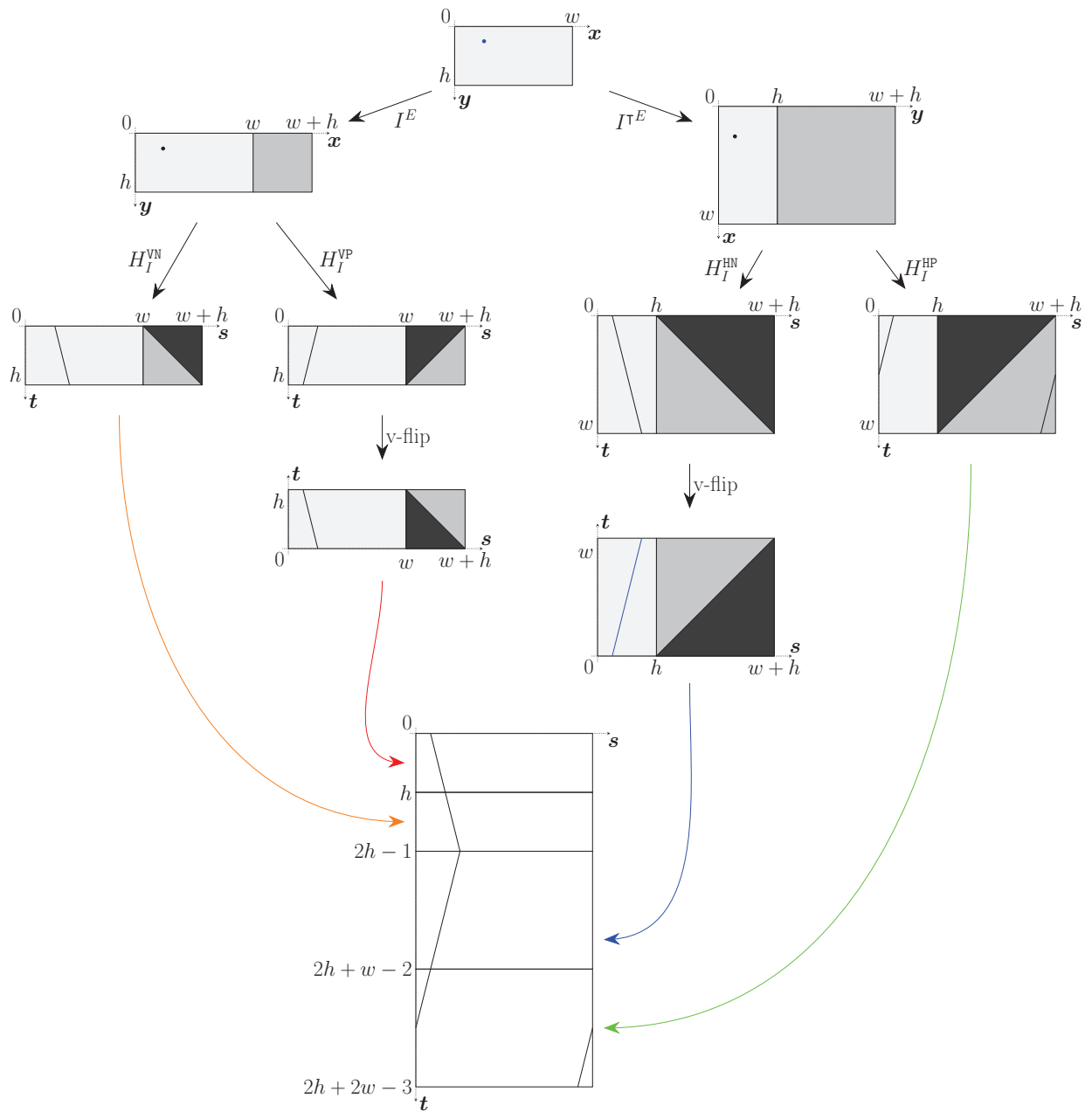


Рис. 7. Схема формирования полного БПХ образа для всех квадрантов

которого совпадает с концом отрезка-образа для ПВП и ПВО, то есть образом точки на рассматриваемом полном БПХ-образе является двузвенная ломаная.

Для сопоставления  $st$ -координат точки полного БПХ-образа и пары точек исходного пространства алгоритмы из раздела 2.3 необходимо дополнить:

1. по  $t$ -координате определить в БПХ-образе какого именно из квадрантов точка лежит;
2. с учетом возможного вертикального отражения вычислить положение точки внутри БПХ-образа для конкретного квадранта;
3. для известного квадранта и  $(s, t)$ -координат внутри БПХ-образа этого квадранта найти параметры прямой.

Формально запишем это в виде алгоритма 4.

---

**Алгоритм 4** Определение параметров непрерывной прямой исходного пространства, которая соответствует координатам точки полного БПХ-образа в  $st$ -координатах

---

**Require:**  $w = 2^W, h = 2^H, W, H \in \mathbb{N}, s \in [0, w + h - 1] \subset \mathbb{Z}, t \in [0, 2h + 2w - 3] \subset \mathbb{Z}$

```

1: procedure ТочВСЕ( $w, h, s, t$ )
2:   if ( $t < h$ ) then
3:      $t_{VP} \leftarrow h - t$  ▷ учтем v-flip для  $H_{I_{w,h}}^{VP}$ 
4:      $(x_B, y_B), (x_E, y_E) \leftarrow$  ТочПВП( $w, h, s, t_{VP}$ )
5:   if ( $h \leq t$ ) & ( $t < 2h - 1$ ) then
6:      $t_{VN} \leftarrow t - h$  ▷ учтем сдвиг и v-flip для  $H_{I_{w,h}}^{VN}$ 
7:      $(x_B, y_B), (x_E, y_E) \leftarrow$  ТочПВО( $w, h, s, t_{VN}$ )
8:   if ( $2h - 1 \leq t$ ) & ( $t < 2h + w - 2$ ) then
9:      $t_{HN} \leftarrow w - (t - (2h - 1))$  ▷ учтем сдвиг и v-flip для  $H_{I_{w,h}}^{HN}$ 
10:     $(y_B, x_B), (y_E, x_E) \leftarrow$  ТочПВО( $w, h, s, t_{HN}$ ) ▷ учтем транспонирование
11:   if ( $2h + w - 2 \leq t$ ) then
12:      $t_{HP} \leftarrow t - (2h + w - 2)$  ▷ учтем сдвиг  $H_{I_{w,h}}^{HP}$ 
13:      $(y_B, x_B), (y_E, x_E) \leftarrow$  ТочПВП( $w, h, s, t_{HP}$ ) ▷ учтем транспонирование
14:   return  $(x_B, y_B), (x_E, y_E)$ 

```

---

### 3. УСКОРЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТИЧНЫХ БПХ-ОБРАЗОВ

В прикладных задачах компьютерного зрения, решаемых методами Хаф-анализа, не всегда требуется вычислять полный БПХ-образ. При наличии априорной информации о том, что искомое решение может лежать только в определенной области Хаф-спектра, возникает задача вычисления БПХ для ограниченного диапазона значений угла ориентации прямых, не совпадающего в общем случае ни с одним из диапазонов, вычисляемых алгоритмом Брейди-Ёна.

Примерами таких задач являются определение угла наклона текста [34] на странице и локализация прямолинейных границ документа, предъявленного для идентификации [31]. В обоих случаях исследуемый угловой диапазон значительно меньше, чем  $45^\circ$ . В подобных задачах можно вычислять полный БПХ-образ и игнорировать в нем строки, не соответствующие заданному диапазону ориентаций, но можно достичь аналогичного результата за меньшее число операций. Ниже подробно изложен метод ускорения построения частичного БПХ-образа за счет преобразования углового диапазона, впервые опубликованный в краткой форме в [52].

#### 3.1. Схема ускоренного вычисления частичного БПХ-образа для ПВ прямых

Пусть суммирование осуществляется вдоль ПВ прямых, лежащих в диапазоне углов  $[-\varphi_1, \varphi_2]$ ,  $0^\circ \leq \varphi_1, \varphi_2$ ,  $0^\circ < \varphi_1 + \varphi_2 < 45^\circ$  (рис. 8.а).

Общая схема алгоритма ускоренного вычисления частичного БПХ-образа:

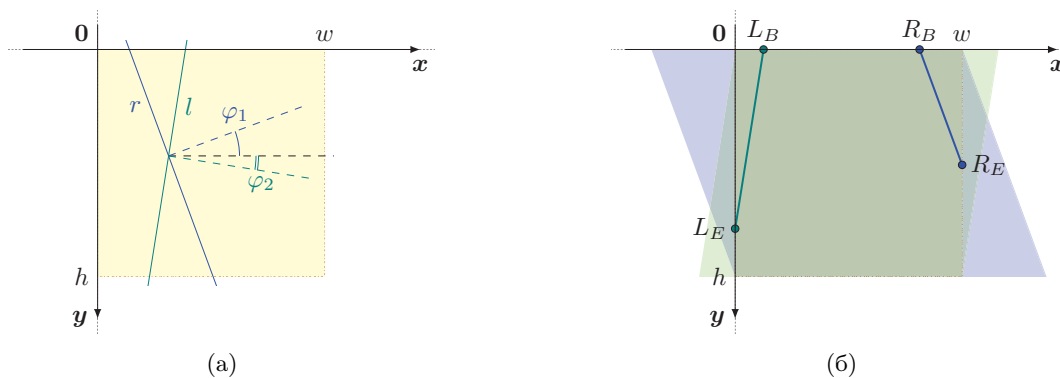


Рис. 8. Схема вычисления частичного БПХ-образа для ПВ прямых (а) исходный диапазон углов  $[-\varphi_1, \varphi_2]$ , (б) исходные направления суммирования и примеры сегментов

1. сжать исходное изображение  $I_{(w,h)}$  по вертикали в  $k$  целое число раз,  $k = \lfloor (\text{tg}(\varphi_1) + \text{tg}(\varphi_2))^{-1} \rfloor$ , результатом сжатия является изображение  $S_{(w,v)}$  размера  $w \times v$ ,  $v = \lceil \frac{h}{k} \rceil$  (рис. 9.а-б) на котором исходному диапазону направлений соответствует диапазон направлений  $[-\varphi_{S,1}, \varphi_{S,2}]$ ;
2. построить изображение  $F_{(w,v)}$  (рис. 9.в-г) путем скоса сжатого изображения  $S_{(w,v)}$  вдоль оси  $Ox$  с коэффициентом  $s = -\text{tg} \varphi_{S,1}$ ;
3. вычислить БПХ для ПВО (диапазон  $[-45^\circ, 0^\circ]$ ) от изображения  $F_{(w,v)}$ .

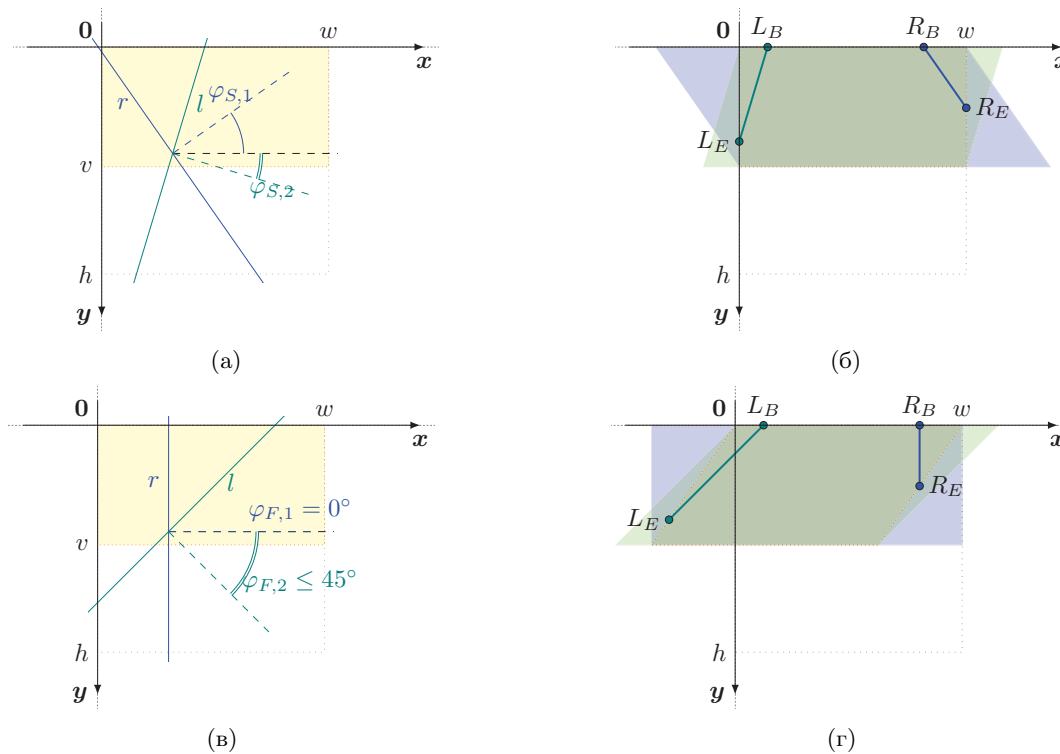


Рис. 9. Схема вычисления частичного БПХ-образа для ПВ прямых. (а) диапазон углов после сжатия, (б) направления суммирования и примеры сегментов после сжатия, (в) диапазон углов после скоса, (г) направления суммирования и примеры сегментов после скоса

Отдельные шаги алгоритма будут рассмотрены далее: сжатие в разделе 3.2, расчет БПХ для изображения после скоса в разделе 3.3.



Если параметры задачи таковы, что  $k$  и  $v$  вычисляются без округления, то на изображении  $F_{(w,v)}$  исходному диапазону направлений соответствует диапазон  $[-45^\circ, 0^\circ]$ . В общем же случае этот диапазон может быть несколько меньше, и в любом случае покрывается однократным применением алгоритма Брейди-Ёна.

3.2. Сжатие изображения

Для сжатия по вертикали в  $k$  раз исходного изображения  $I_{(w,h)}$  вычисляются суммы значений пикселей по вертикальным отрезкам длины  $k$ , а результат сохраняется в виде изображения  $S_{(w,v)}$ :

$$S_{(w,v)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \begin{cases} I_{(w,h)}(x, ky + i), & ky + i < h \\ 0, & ky + i \geq h \end{cases}$$

Сжатое изображение вычисляется за  $\lceil \frac{h}{k} \rceil wk$  операций сложения.

БПХ-образ изображения  $S_{(w,v)}$  является и БПХ-образом для изображения  $I_{(w,h)}$ , при этом паттерны на изображении  $I_{(w,h)}$  уже не обязательно являются диадическими, и состоят из вертикальных отрезков размером в  $k$  позиций. Диапазон ориентации прямых  $[-\varphi_1, \varphi_2]$  на исходном изображении соответствует диапазону  $[-\varphi_{S,1}, \varphi_{S,2}]$  на изображении  $F_{(w,h)}$ , при этом  $\text{tg } \varphi_{S,i} = k \text{tg } \varphi_i, i = 1, 2$ .

В случае, если  $w$  и  $k$  являются степенями двойки, то паттерны сохраняют диадичность (см. рис. 10) и сжатие, реализованное алгоритмом, будет ускорять подсчет, в точности вычисляя искомые суммы.

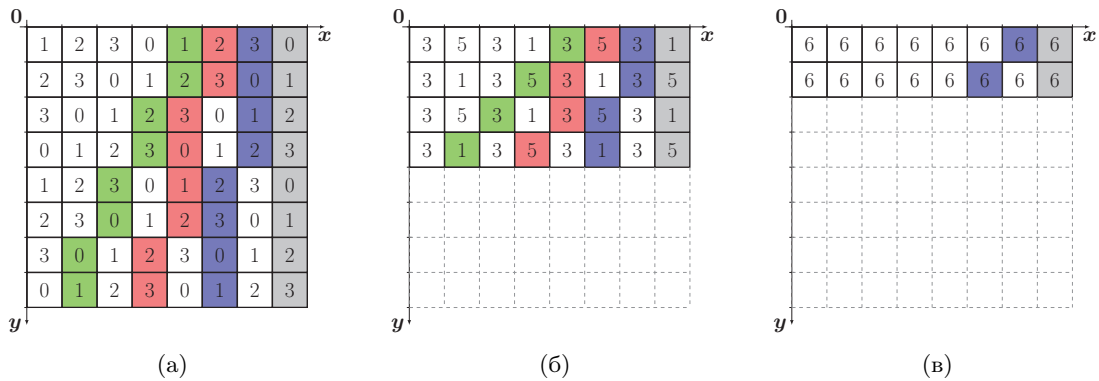


Рис. 10. Схема сжатия по вертикали с  $k = 2^l, l \in \mathbb{N}$ , паттерны частичного ПВО диапазона отмечены разными цветами: (а) исходное изображение  $I_{(8,8)}$ , наклон паттернов  $t \in [0, 3]$ ; (б)  $S_{(8,4)}$  – сжатие с  $k = 2$ , исходным паттернам соответствует наклон  $t \in [0, 2]$ ; (в)  $S_{(8,2)}$  – сжатие с  $k = 4$ , исходным паттернам соответствует наклон  $t \in [0, 1]$

Например, при сжатии с  $k = 2$  соответствующие паттерны имеют ту же сумму и являются диадическими (рис. 10.б). При сжатии с  $k = 4$  нет полного соответствия исходному рассматриваемому угловому диапазону, имеющие соответствие паттерны отмечены теми же цветами.

3.3. Скос изображения

Координатным скосом назовем линейное преобразование координат вида

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_x \\ s_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

где  $x, y$  – координаты до скоса (исходные),  
 $x_s, y_s$  – координаты после скоса,  
 $s_x, s_y \in \mathbb{R}, s_x s_y = 0$  – коэффициенты скоса.

Будем говорить, что скос происходит вдоль оси  $Ox$  при  $s_x \neq 0$  или вдоль оси  $Oy$  при  $s_y \neq 0$  (см.рис. 11).

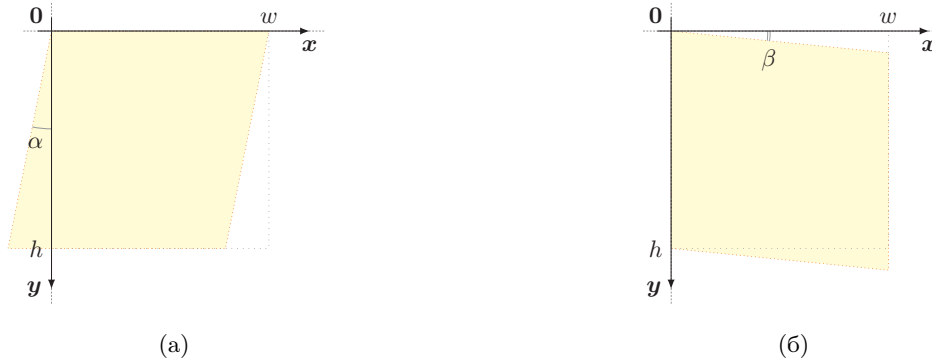


Рис. 11. Схема координатного скоса (а) вдоль оси  $Ox$  для  $s_x = -\operatorname{tg} \alpha$ , (б) вдоль оси  $Oy$  для  $s_y = \operatorname{tg} \beta$

Скос изображения параметризуется аналогично координатному и реализуется соответствующим циклическим сдвигом строк или столбцов. Например, для вычисления частичных БПХ-образов ПВО прямых необходимый скос исходного изображения  $I_{(w,h)}$  вдоль оси  $Ox$  с коэффициентом скоса  $s_x = -s$  определяется формулой

$$F_{(w,h)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} I_{(w,h)}((x - \lfloor sy \rfloor) \bmod w, y). \tag{5}$$

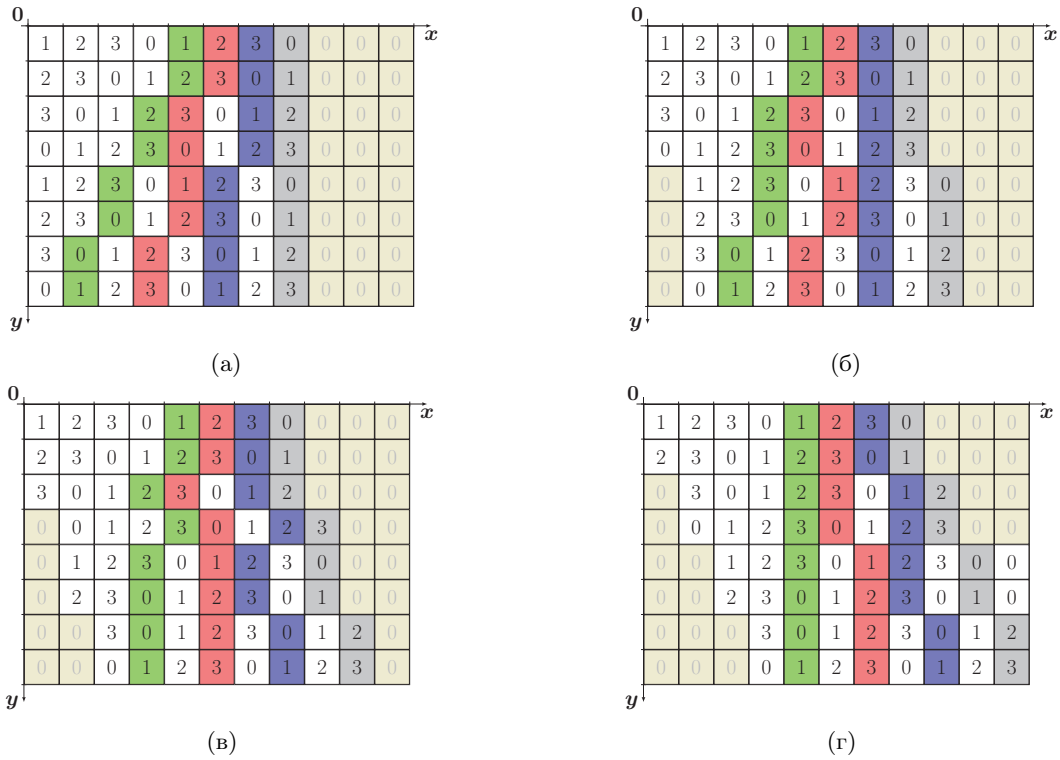
Иллюстрация преобразования изображения с дополнением в процессе скоса для разных значений коэффициента скоса приведена на рис. 12 и наглядно показывает, что диадичность паттернов может нарушаться.

Оценка максимального ортотропного отклонения геометрической прямой от аппроксимирующего ее диадического паттерна, используемого при вычислении БПХ (алгоритм 1) для квадратного изображения с размером стороны  $n = 2^N, N \in \mathbb{N}$ , получена в работе [47] и составляет  $\delta_{diadic} = \frac{N}{6}$ . Максимальное горизонтальное отклонение паттерна от соответствующей геометрической прямой в результате скоса определяется округлением в формуле (5) и составляет 1. Таким образом, после скоса изображения максимальное горизонтальное отклонение  $\delta$  геометрической прямой от аппроксимирующего ее паттерна для изображения высоты  $h = 2^H, H \in \mathbb{N}$  может быть оценено как

$$\delta = 1 + \delta_{diadic} = 1 + \frac{H}{6}.$$

Расчет БПХ с учетом скоса может быть реализован при помощи модифицированного алгоритма Брейди-Ёна (алгоритм 1) без дополнительных вычислительных затрат и использования дополнительной памяти. Считая, что вне изображения нет значащих пикселей, для получения БПХ-образа изображения после скоса вдоль оси  $Ox$  с коэффициентом  $s_x = -\operatorname{tg} \varphi_{F,2}$  достаточно на первой (и только первой) итерации просуммировать строки изображения уже циклически сдвинутыми, т.е. алгоритм примет следующий вид.

Для оценки сложности схемы ускоренного вычисления учтем, что модификация алгоритма 5 позволяет совместить шаги скоса и вычисления БПХ, а дополнение нулями и расчет БПХ производятся для сжатого изображения  $F_{(w,v)}$ . Высота сжатого изображения  $v = \lceil \frac{h}{k} \rceil$ , ширина области дополнения  $d = \lceil v \operatorname{tg} \varphi_{F,2} \rceil = \lceil \lceil \frac{h}{k} \rceil k \operatorname{tg} \varphi_{F,2} \rceil \leq \lceil \frac{h}{k} \rceil$ . Сложность вычисления БПХ



**Рис. 12.** Схема скоса вдоль оси  $Ox$  изображения  $I_{(8,8)}$  с дополнением, паттерны частичного ПВО диапазона отмечены разными цветами: (а) исходное изображение, наклон паттернов  $t \in [0, 3]$ ; (б) результат скоса для  $s_x = \frac{1}{4}$ ; (в) результат скоса для  $s_x = \frac{1}{3}$ ; (г) результат скоса для  $s_x = \frac{1}{2}$

**Алгоритм 5** Вычисление БПХ для прямых квадранта ПВО с одновременным скосом вдоль оси  $Ox$  с коэффициентом  $s_x = -s$  (модификация алгоритма 1)

```

1: procedure БПХБС( $I_{n,n}, n, s$ )
2:    $R_0(x, y, 0) \leftarrow I_{n,n}(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_{0,n-1}, y \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$  ▷ как в оригинальном алгоритме
3:    $R_0(x, y, 0) \leftarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}_{n,2n-1}, y \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$ 
4:    $i \leftarrow 1$  ▷ первая особая итерация для учета скоса
5:   for  $a = 0$  to  $2^i - 1$  do
6:     for  $y = 0$  to  $n - 2^i$  step  $2^i$  do
7:       for  $x = 0$  to  $2n - 1$  do
8:          $x_1 \leftarrow (x - \lfloor ys \rfloor) \bmod 2n$ 
9:          $x_2 \leftarrow (x - \lfloor a/2 \rfloor - \lfloor ys \rfloor) \bmod 2n$ 
10:         $y_2 \leftarrow y + 2^{i-1}$ 
11:         $R_i(x, y, a) \leftarrow R_{i-1}(x_1, y, \lfloor a/2 \rfloor) + R_{i-1}(x_2, y_2, \lfloor a/2 \rfloor)$ 
12:   for  $i = 2$  to  $\log_2 n$  do ▷ далее аналогично оригинальному алгоритму
13:     for  $a = 0$  to  $2^i - 1$  do
14:       for  $y = 0$  to  $n - 2^i$  step  $2^i$  do
15:         for  $x = 0$  to  $2n - 1$  do
16:            $x_2 \leftarrow (x - \lfloor a/2 \rfloor) \bmod 2n$ 
17:            $y_2 \leftarrow y + 2^{i-1}$ 
18:            $R_i(x, y, a) \leftarrow R_{i-1}(x, y, \lfloor a/2 \rfloor) + R_{i-1}(x_2, y_2, \lfloor a/2 \rfloor)$ 
19:    $H_I(x, a) = R_{\log_2 n}(x, 0, a) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_{0,n-1}, a \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$ 
20:   return  $H_I$ 

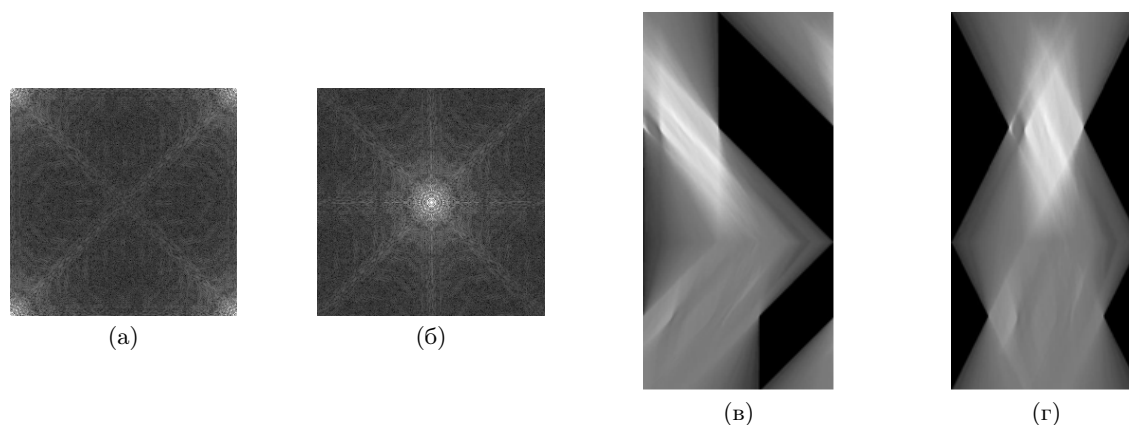
```

составляет  $\Omega\left(\left(\left\lceil \frac{h}{k} \right\rceil + w\right) \left\lceil \frac{h}{k} \right\rceil \log_2 \left\lceil \frac{h}{k} \right\rceil\right)$  сложений. Полная вычислительная сложность расчета БПХ по схеме ускоренного вычисления составляет  $\Omega\left(\left\lceil \frac{h}{k} \right\rceil wk + \left(\left\lceil \frac{h}{k} \right\rceil + w\right) \left\lceil \frac{h}{k} \right\rceil \log_2 \left\lceil \frac{h}{k} \right\rceil\right)$  сложений, что учитывает сложность сжатия и сложность вычисления БПХ.

Изложенный метод построения частичного БПХ-образа позволяет получать ускорение при, возможно, некотором уменьшении точности.

#### 4. FHTSHIFT – ПЕРЕГРУППИРОВКА БПХ-ОБРАЗА

Особенностью БПХ-образа, вычисляемого алгоритмом Брейди-Ёна, является потеря связности значимых зон (рис. 13.с), что затрудняет интерпретацию БПХ-образа человеком и усложняет реализацию сверточных нейронных сетей с использованием Хаф-слоя [53, 54]. Похожая проблема возникает при использовании быстрого преобразования Фурье (БПФ) и решается применением преобразования *fftshift*, который перегруппировывает результат путем сдвига нулевой частоты в центр спектра (рис. 13.а и рис. 13.б).



**Рис. 13.** Пример визуализации результатов (а) БПФ, (б) БПФ после *fftshift*, (в) полного БПХ и (г) полного БПХ после *fhtshift*

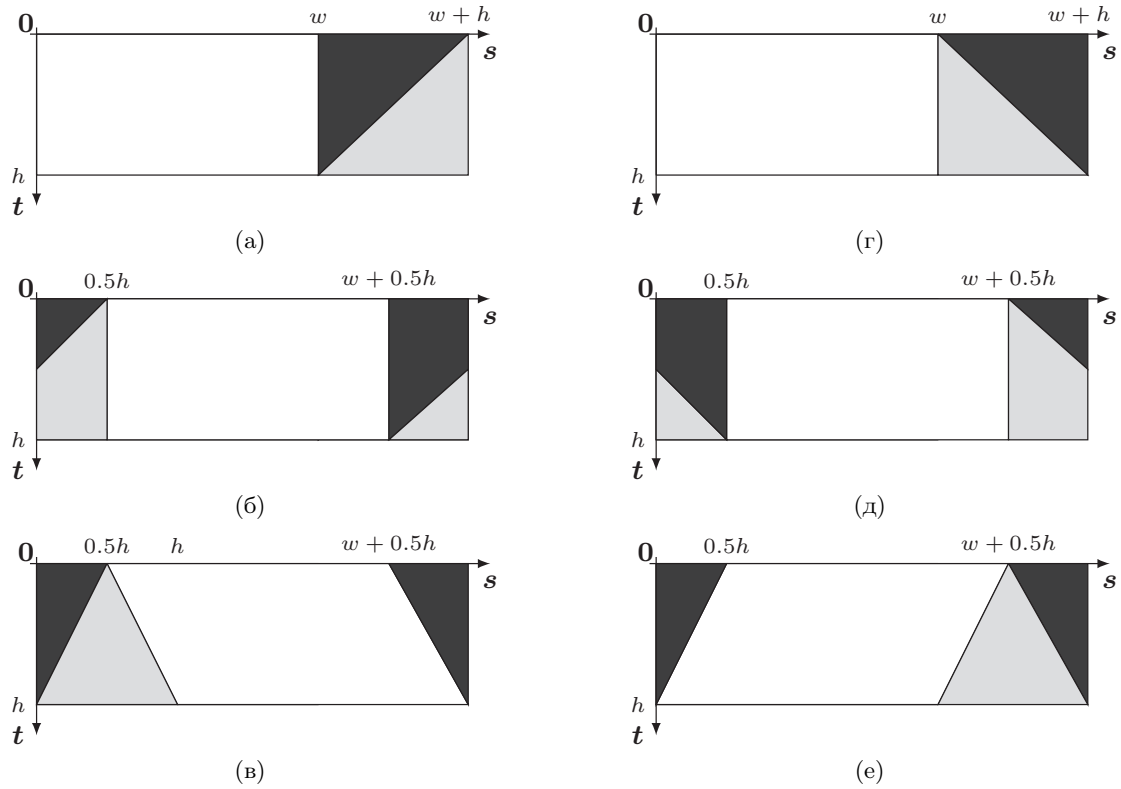
Для перегруппировки полного БПХ-образа (рис. 13.в и рис. 13.г) в работе [52] предложено преобразование *fhtshift*. Это преобразование применяется к БПХ-образу каждого квадранта до отражений и конкатенации в процессе формирования полного БПХ-образа, описанного в разделе 2.4. Перегруппировка достигается последовательным применением циклического сдвига строк (вдоль оси  $Ox$ ) на  $0.5h$  и скоса вдоль оси  $Ox$  с коэффициентом  $s_x = \pm 0.5$  (см. таблицу 3).

**Таблица 3.** Коэффициент скоса  $s_x$  для разных квадрантов при реализации *fhtshift*

| квадрант | $s_x$ |
|----------|-------|
| ПВП      | +0.5  |
| ПВО      | -0.5  |
| ПГО      | -0.5  |
| ПГП      | +0.5  |

На рис. 14 проиллюстрированы шаги реализации *fhtshift* для  $H_I^{VP}$  и  $H_I^{VN}$ , БПХ-образов для квадрантов ПВП и ПВО.

Рассмотренный метод перегруппировки БПХ-образа *fhtshift* с использованием сдвига и скоса (алгоритм 5) реализуется без дополнительных вычислительных затрат и устраняет эффект «перетекания», когда значимая часть БПХ-образа «продолжается» циклически сдвинутой.



**Рис. 14.** Схема *fhtshift* (а)  $H_I^{VP}$ , (б)  $H_I^{VP}$  после сдвига, (в)  $H_I^{VP}$  после сдвига и скоса, (г)  $H_I^{VN}$ , (д)  $H_I^{VN}$  после сдвига, (е)  $H_I^{VN}$  после сдвига и скоса

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в качестве дискретизации преобразования Радона на плоскости алгоритм быстрого приближенного вычисления Хаф-образа изображения нашел широкое применение при решении задач компьютерной томографии, в анализе изображений и компьютерном зрении. Несмотря на многочисленные публикации, развивающие идеи оригинальных алгоритмов, часть важных технических моментов оставалась недостаточно раскрытой в силу «очевидности».

В этой работе авторы собрали, формализовали, структурировали, при необходимости дополнили и проиллюстрировали большое количество нетривиальных практических аспектов вычисления Хаф-образа алгоритмом Брейди-Ёна. В частности, детально описаны связанные с алгоритмом системы координат и *st*-параметризация прямых, рассмотрены структура Хаф-образа и параметризация точки БПХ-образа прямой исходного пространства, формализованы методы построения Хаф-образов для полного и малого диапазонов направлений суммирования, обсуждена перегруппировка вычисляемого алгоритмом Брейди-Ёна Хаф-образа для устранения циклического «перетекания» элементов образа.

Авторы надеются, что детальное рассмотрение технических и практических аспектов быстрого вычисления Хаф-образа алгоритмом Брейди-Ёна послужит дальнейшей популяризации этого эффективного подхода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hough P. V. C. Machine Analysis of Bubble Chamber Pictures. *Proc., 2nd International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation, HEACC 1959*. Geneva: CERN, 1959, vol. 590914, pp. 554–558.

2. Hough P. V. C. Method and means for recognizing complex patterns. *Patent US 3069654 A*, 1962.
3. Hart P. E. How the Hough transform was invented [DSP History]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2009, vol. 26, no. 6, pp. 18–22.
4. Розенфельд А. *Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин*. М.: Мир, 1972.
5. Duda R. O., Hart P. E. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. *Commun. ACM*, 1972, vol. 15, no. 1, pp. 11–15.
6. Kiryati N., Eldar Y., Bruckstein A. M. A probabilistic Hough transform. *Pattern Recognition*, 1991, vol. 24, no. 4, pp. 303–316.
7. Ben-Tzvi D., Sandler M. B. A combinatorial Hough transform. *Pattern Recognition Letters*, 1990, vol. 11, no. 3, pp. 167–174.
8. Xu L., Oja E., Kultanen P. A new curve detection method: Randomized Hough transform (RHT). *Pattern Recognition Letters*, 1990, vol. 11, no. 5, pp. 331–338.
9. Fischler M. A., Bolles R. C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. *Commun. ACM*, 1981, vol. 24, no. 6, pp. 381–395.
10. Deans S. R. Hough Transform from the Radon Transform. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1981, vol. PAMI-3, no. 2, pp. 185–188.
11. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsische Akademie der Wissenschaften*, 1917, vol. 69, pp. 262–277.
12. Illingworth J., Kittler J. A ey of the hough transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1988, vol. 44, no. 1, pp. 87–116.
13. Brady M. L., Yong W. Fast Parallel Discrete Approximation Algorithms for the Radon Transform. *SPAA'92 Proceedings of the fourth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*. 1992, pp. 91–99.
14. Brady M. L. A fast discrete approximation algorithm for the Radon transform. *SIAM Journal on Computing*, 1998, vol. 27, no. 1, pp. 91–99.
15. Götz W. A., Druckmüller H. J. A fast digital Radon transform – An efficient means for evaluating the Hough transform. *Pattern Recognition*, 1995, vol. 28, no. 12, pp. 1985–1992.
16. Götz W. A., Druckmüller H. J. A fast digital Radon transform – an efficient means for evaluating the Hough transform. *Pattern Recognition*, 1996, vol. 29, no. 4, pp. 711–718.
17. Vuillemin J. E. Fast linear Hough transform. *Proceedings of IEEE International Conference on Application Specific Array Processors (ASSAP'94)*. 1994, pp. 1–9.
18. Алиев М. А., Николаев Д. П., Сараев А. А. Построение быстрых вычислительных схем настройки алгоритма бинаризации Ниблэка. *Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)*, 2014, Т. 64, № 3, стр. 25–34.
19. Nikolaev D. P., Nikolayev P. P. Linear color segmentation and its implementation. *Computer Vision and Image Understanding, Special Issue: Colour for Image Indexing and Retrieval*, 2004, vol. 94, no. 1, pp. 115–139.
20. Кунина И. А., Гладилин С. А., Николаев Д. П. Слепая компенсация радиальной дисторсии на одноканальном изображении с использованием быстрого преобразования Хафа. *Компьютерная оптика*, 2016, т. 40, № 3, стр. 395–403.
21. Асватов Е. Н., Ершов Е. И., Николаев Д. П. Робастная ортогональная линейная регрессия для маломерных гистограмм. *Сенсорные системы*, 2017, Т. 31, № 4, стр. 331–342.
22. Aminuddin N. S., Ibrahim M. M., Ali N. M., Radzi S. A., Saad W. H. M., Darsono A. M. A new approach to highway lane detection by using Hough transform technique. *Journal of Information and Communication Technology*, 2017, vol. 16, no. 2, pp. 244–260.

23. Кунина И. А., Панфилова Е. И., Поволоцкий М. А. Детектирование пешеходных переходов на изображениях дороги на основе метода динамического выравнивания временных рядов. *Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)*, 2018, Т. 68, № S1, стр. 23–31.
24. Panfilova E. I., Shipitko O. S., Kunina I. A. Fast Hough Transform-Based Road Markings Detection For Autonomous Vehicle. *Proc. SPIE 11605, Thirteenth International Conference on Machine Vision (ICMV 2020)*. 2021, vol. 11605, pp. 671–680.
25. Jahan R., Suman P., Singh D. K. Lane detection using canny edge detection and hough transform on raspberry Pi. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, 2018, vol. 9, no. S2, pp. 85–89.
26. Guan J., An F., Zhang X., Chen L., Mattausch H. J. Energy-Efficient Hardware Implementation of Road-Lane Detection Based on Hough Transform with Parallelized Voting Procedure and Local Maximum Algorithm. *IEICE Transactions on Information and Systems*, 2019, vol. E102.D, no. 6, pp. 1171–1182.
27. Thongpan N., Rattanasiriwongwut M., Ketcham M. Lane Detection Using Embedded System. *International Journal of the Computer, the Internet and Management*, 2020, vol. 28, no. 2, pp. 46–51.
28. Котов А. А., Коноваленко И. А., Николаев Д. П. Прослеживание объектов в видеопотоке, оптимизированное с помощью быстрого преобразования Хафа. *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2015, № 1, стр. 56–68.
29. Бочаров Д. А. Метод линейной регрессии, устойчивый к экстремальным стационарным помехам. *Сенсорные системы*, 2020, т. 34, № 1, стр. 44–56.
30. Schwartz R., Dodge J., Smith N. A., Etzioni O. Green AI. *Communications of the ACM*, 2020, vol. 63, no. 12, pp. 54–63.
31. Tropin D. V., Ilyuhin S. A., Nikolaev D. P., Arlazarov V. V. Approach for Document Detection by Contours and Contrasts. *2020 25th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*. 2021, pp. 9689–9695.
32. Bezmaternykh P. V., Nikolaev D. P. A document skew detection method using fast Hough transform. *Proc. SPIE 11433, Twelfth International Conference on Machine Vision (ICMV 2019)*. 2020, vol. 11433, pp. 132–137.
33. Гайер А. В., Шешкус А. В. Нейросетевая детекция верхней и базовой линий текстовой строки на изображении. *XII мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2019)*. 2019, стр. 53–58.
34. Limonova E., Bezmaternykh P., Nikolaev D., Arlazarov V. Slant rectification in Russian passport OCR system using fast Hough transform. *Proc. SPIE 10341, Ninth International Conference on Machine Vision (ICMV 2016)*. 2017, vol. 10341, pp. 127–131.
35. Martynov S. I., Bezmaternykh P. V. Aztec core symbol detection method based on connected components extraction and contour signature analysis. *Proc. SPIE 11433, Twelfth International Conference on Machine Vision (ICMV 2019)*. 2020, vol. 11433, pp. 27–34.
36. Ершов Е. И., Терехин А. П., Николаев Д. П. Обобщение быстрого преобразования Хафа для трехмерных изображений. *Информационные процессы*, 2017, Т. 17, № 4, стр. 294–308.
37. Bulatov K. B., Chukalina M. V., Nikolaev D. P. Fast X-ray sum calculation algorithm for computed tomography *Bulletin of the South Ural State University series – mathematical modelling programming & computer software*, 2020, vol. 13, no. 1, pp. 95–106.
38. Dolmatova A. V., Chukalina M. V., Nikolaev D. P. Accelerated FBP for Computed Tomography Image Reconstruction. *2020 IEEE International Conference on Image Processing*. 2020, pp. 3030–3034.
39. Bulatov K., Chukalina M., Buzmakov A., Nikolaev D., Arlazarov V. V. Monitored Reconstruction: Computed Tomography as an Anytime Algorithm. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 110759–110774.
40. Sheshkus A., Chirvonaya A., Nikolaev D., Arlazarov V. L. Vanishing point detection with direct and transposed fast Hough transform inside the neural network. *Computer Optics*, 2020, vol. 44, no. 5, pp. 737–745.

41. Lin Y., Pinteá S. L., van Gemert J. C. Deep Hough-Transform Line Priors. *Computer Vision – ECCV 2020*. 2020, pp. 323–340.
42. Han Q., Zhao K., Xu J., Cheng M.-M. Deep Hough Transform for Semantic Line Detection. *Computer Vision – ECCV 2020*. 2020, pp. 249–265.
43. Teplyakov L., Kaymakov K., Shvets E., Nikolaev D. Line detection via a lightweight CNN with a Hough Layer. *Proc. SPIE 11605, Thirteenth International Conference on Machine Vision (ICMV 2020)*. 2021, vol. 11605, pp. 376–385.
44. Zhao H., Zhang Z. Improving Neural Network Detection Accuracy of Electric Power Bushings in Infrared Images by Hough Transform. *Sensors*, 2020, vol. 20, no. 10, pp. 2931-1–2931-16.
45. Marichal-Hernandez J. G., Lüke J. P., González F. L. R., Rodríguez-Ramos J. M. Fast approximate 4-D/3-D discrete radon transform for lightfield refocusing. *Journal of Electronic Imaging*, 2012, vol. 21, no. 2, pp. 023026-1–023026-12.
46. Аникеев Ф. А., Райко Г. О., Лимонова Е. Е., Алиев М. А., Николаев Д. П. Эффективная реализация быстрого преобразования Хафа с использованием сопроцессора СРСА. *Программирование*, 2021, № 5, стр. 3–11.
47. Карпенко С. М., Ершов Е. И. Исследование свойств диадического паттерна быстрого преобразования Хафа. *Проблемы передачи информации*, 2021, Т. 57, № 3, стр. 102–111.
48. Nikolaev D. P., Karpenko S. M., Nikolayev I. P. Hough Transform: Underestimated Tool In The Computer Vision Field. *Proceedings of 22nd European Conference on Modelling and Simulation*. 2008, pp. 238–243.
49. Prun V. E., Buzmakov A. V., Nikolaev D. P., Chukalina M. V., Asadchikov V. E. A computationally efficient version of the algebraic method for computer tomography. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 10, pp. 1670–1678.
50. Press W. H. Discrete Radon transform has an exact, fast inverse and generalizes to operations other than sums along lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2006, vol. 103, no. 51, pp. 19249–19254.
51. Gómez-Cárdenes Ó., Marichal-Hernández J. G., Lüke J. P., Rodríguez-Ramos J. M. Central and Periodic Multi-Scale Discrete Radon Transforms. *Applied Sciences, MDPI*, 2021, vol. 11, no. 22, pp. 10606.
52. Aliev M., Ershov E. I., Nikolaev D. P. On the use of FHT, its modification for practical applications and the structure of Hough image. *Proc. SPIE 11041, Eleventh International Conference on Machine Vision (ICMV 2018)*. 2019, vol. 11041, pp. 320–328.
53. Sheshkus A., Nikolaev D., Arlazarov V. L. Houghencoder: neural network architecture for document image semantic segmentation. *2020 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP 2020)*. 2020, pp. 1946–1950.
54. Sheshkus A., Ingacheva A., Nikolaev D. HoughNet: neural network architecture for vanishing points detection. *2019 International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR)*. 2020, pp. 844–849.

## On the practical aspects of computing the Hough image by the Brady-Yong algorithm

M. A. Aliev, I. A. Kunina, D. P. Nikolaev, D. V. Polevoy

Practical aspects of using the fast Hough transform as a fast discrete Radon transform calculation are considered in the article. The Brady-Yong algorithm for calculating the fast Hough transform and coordinate system associated with it are described in detail. A method for calculating limited by the ranges of line angles partial Hough-images is described. Finally, the rearrangement of the Hough-image computed by the Brady-Yong algorithm is discussed, which makes it possible to avoid the cyclic “overflow” of the result pattern.

**KEYWORDS:** fast Hough transform, FHT, discrete Radon transform, Brady-Yong algorithm, FHT coordinate system, partial FHT calculation.