

Об определении преобразования Хафа как дискретного приближения преобразования Радона

Д.П. Николаев

* *Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия*

** *ООО «Смарт Энджинс Сервис», Москва, Россия*

Поступила в редколлегию 16.05.2023

Аннотация—Преобразование Хафа – инструмент цифровой обработки изображений, обсуждаемый и используемый в тысячах научных работ. При этом анализ литературы показывает, что строгое определение этого математического объекта до сих пор не предложено. Более того, существует две довольно далеких друг от друга интерпретации данного термина. В работе обсуждаются обе интерпретации, и делается вывод о большей важности варианта, в котором преобразование Хафа понимается как отображение между дискретными изображениями различных размеров и размерностей. Исходя из такого понимания, дается математическое определение этого безусловно интересного объекта.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: преобразование Хафа, дискретное преобразование Радона.

DOI: 10.53921/18195822_2023_23_2_274

1. ВВЕДЕНИЕ

Обычно под преобразованием Хафа (ПХ) понимают метод робастного оценивания параметров одной или нескольких прямых на дискретном изображении путем подсчета числа точек, лежащих на каждой из множества дискретных прямых. Но ни в исходной публикации [1], ни в патенте Пола Хафа [2] не приводится формального определения предлагаемого преобразования. По-видимому впервые формализацию ПХ, хотя бы частичную, осуществил Азриэль Розенфельд в своей книге «Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин» [3]. Но ПХ, повсеместно описываемое в современных учебниках по техническому зрению, – это преобразование, формально введенное в статье Ричарда Дуды и Питера Харта [4].

В работах П. Хафа, судя по иллюстрациям (формул он не приводит), для прямых используется параметризация с угловым коэффициентом ($y = kx + b$). При этом в пространстве параметров прямых (k, b) множество, соответствующее прямым, проходящим через фиксированную точку (x_0, y_0) исходного пространства, составляет именно прямую: $b = -x_0 k + y_0$. Эта параметризация сохранена у А. Розенфельда. Р. Дуда и П. Харт обратили внимание на то, что при параметризации с угловым коэффициентом для любого размера аккумуляторного пространства строго вертикальные прямые $x = b$ не будут иметь своего аккумулятора [4]. Поэтому они предложили использовать нормальную параметризацию прямых ($x \cos \varphi + y \sin \varphi = \rho$). Образом точки исходного пространства в аккумуляторном пространстве (ρ, φ) является дискретная синусоида. На сегодняшний день, в зависимости от задачи, используются обе параметризации, и представляется естественным оба варианта называть ПХ.

Кроме смены параметризации, работа [4] важна тем, что голосующая парадигма ПХ распространяется в ней на любые параметрические кривые. Размерность аккумуляторного пространства при этом оказывается равной числу параметров кривой. В качестве примера авторы

разбирают случай трехпараметрической кривой – окружности. Впоследствии такое расширение стали называть обобщенным ПХ (ОПХ). Сам термин впервые ввел в употребление Дана Баллард в 1981 году [5].

Вернемся теперь собственно к ПХ. На рис. 1 проиллюстрировано, как с его помощью определяются параметры прямой, описывающей положения большинства непустых точек изображения. Точки с номерами 1–6 лежат на одной прямой, а точка с номером 7 является выбросом. При наличии выбросовых помех неробастные методы, такие как метод наименьших квадратов (МНК), дают существенно ошибочные результаты. На рис. 1а показано, насколько далекое решение дает МНК для указанного множества семи точек. На рис. 1б приведен Хаф-образ той же композиции в нормальной параметризации, причем для каждой точки указана соответствующая синусоида. Максимум Хаф-образа имеет координаты, совпадающие с параметрами искомой прямой, приведенной на рис. 1в.

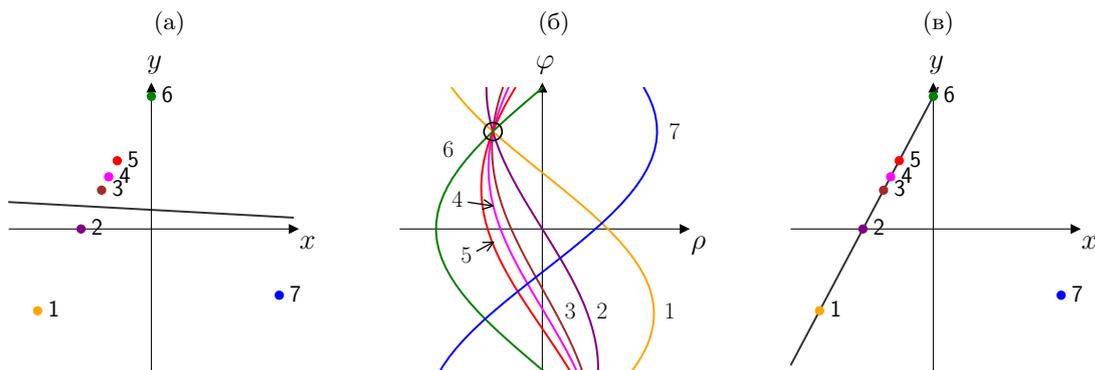


Рис. 1. Преобразование Хафа с нормальной параметризацией: (а) шесть точек, лежащих на одной прямой в исходном пространстве и одна, являющаяся выбросом; отмечена прямая, являющаяся решением задачи определения параметров прямой методом наименьших квадратов; (б) Хаф-образ исходного изображения, кружком отмечено его максимальное значение; (в) прямая в исходном пространстве, с параметрами, равными координатам максимума Хаф-образа.

Итак, ПХ позволяет робастно определять параметры прямой, на которой лежит множество точек на изображении, но вычислительная сложность метода кажется неоправданно большой. Пусть на входном изображении размера $n \times n$ отмечено k точек. Если плотность точек не меняется при изменении размера изображения ($k \sim n^2$), то вычислительная трудоемкость прямого вычисления ПХ составляет $\Theta(n^3)$. До сегодняшнего дня исследуются два пути ускорения ПХ.

В первом из них предполагается, что входные данные представляют собой список точек, а целью является поиск координат глобального максимума на Хаф-образе, а не вычисление всего образа. Наиболее последовательная работа по ускорению вычисления ПХ в такой постановке была проделана Лэй Сюем с соавторами [6]. В методе, названном ими рандомизированным ПХ, используются четыре идеи. Во-первых, поскольку в искомом пике на аккумуляторном изображении пересекается как минимум две траектории «голосов», рассматриваются пары голосующих точек и для каждой пары инкрементируется единственный аккумулятор – соответствующий прямой, проходящей через выбранную пару точек. Во-вторых, аккумуляторное пространство представляет собой в рандомизированном ПХ список непустых ячеек, а не массив. Это существенно (и об этом авторы говорят явно) для ОПХ, где число оцениваемых параметров (и, соответственно, размерность аккумуляторного пространства) может быть гораздо больше двух. В-третьих, авторы предложили для ячеек аккумуляторного пространства с надпороговыми значениями определять их истинное значение проверкой всех входных точек на соответствие модели с параметрами, задаваемыми координатами ячейки. В-четвертых, авторы

предложили удалять из исходного набора точек те, для которых уже установлено соответствие обработанным ячейкам.

Но за 9 лет до работы Л. Сюя с соавторами вышла статья Мартина Фишлера и Роберта Боллеса о новой парадигме установления параметров моделей в анализе изображений и картографии – RANSAC (Random Sample Consensus, консенсус случайных выборок) [7], где все эти идеи уже были предложены и использованы. Здесь можно предвидеть возражение: задача, которую решали М. Фишлер и Р. Боллес, лежит далеко от проблематики ПХ. Парадигма RANSAC подробно рассматривалась ими применительно к задаче робастного определения параметров проективного преобразования, связывающего два изображения, на основе известных точечных корреспондентий. С таким возражением нельзя согласиться. Статья начинается с утверждения, что читателям представлена общая парадигма робастного установления параметров модели, применимая к широкому классу задач автоматического анализа изображений, а установление проективного соответствия является всего лишь примером. Характерна первая иллюстрация в работе М. Фишлера и Р. Боллеса: в ней рассматривается задача определения параметров прямой, описывающей положение коллинеарного подмножества точек (см. рис. 2). Эта иллюстрация с равным успехом могла быть использована в большинстве статей о ПХ.

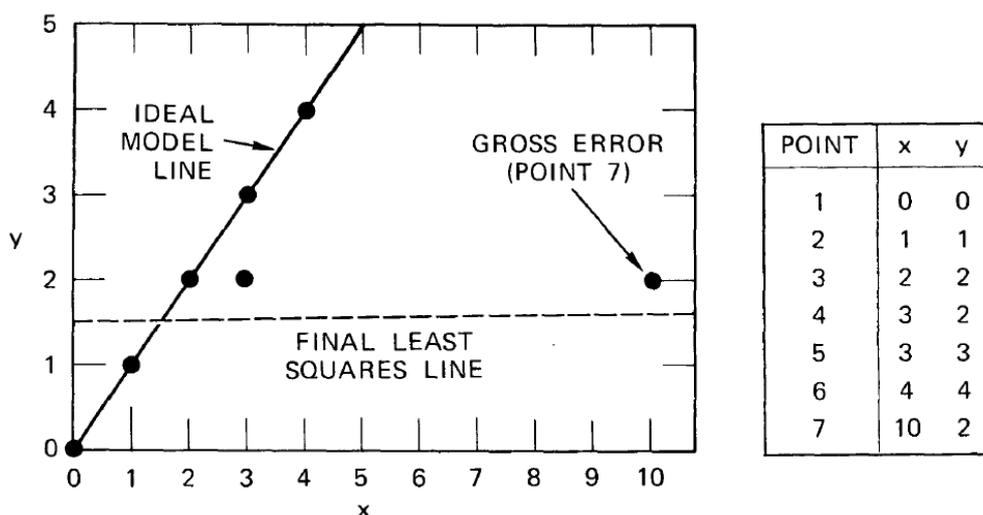


Рис. 2. Иллюстрация из работы М. Фишлера и Р. Боллеса, в которой впервые предлагается метод RANSAC [7]. Проблема загрязненности входных данных и робастности метода обсуждается на примере классической для ПХ задачи – определении параметров прямой на плоскости.

Впоследствии RANSAC неоднократно целенаправленно применялся для поиска тех или иных геометрических примитивов, что дополнительно сблизило методы по области применения. В качестве примера можно привести работу 2007 года Р. Шнабеля с соавторами [8], в которой они применили RANSAC в задаче обнаружения плоскостей, сфер, цилиндров, конусов и торов в трехмерных облаках точек. Вообще, при внимательном сличении методов рандомизированного ПХ и RANSAC применительно к задаче оценивания параметров одного экземпляра модели (одной прямой, одного проективного преобразования) становится ясно, что речь идет об одном и том же методе, реализованном с незначительными алгоритмическими различиями.

Статья о RANSAC М. Фишлера и Р. Боллеса [7] на начало 2022 года имеет более 25 тыс. цитирований (для сравнения: работа Р. Дуды и П. Харта [4], популяризовавшая ПХ, цитируется менее 10 тыс. раз), то есть эта смежная область вызывает у исследователей значительно больший интерес. При этом развитие метода RANSAC не прерывается. Многие его модификации

описаны, например, в обзоре Х. Сангаппы и К. Рамакришнана 2019 года [9]. Продолжаются, в том числе, исследования, направленные на дальнейшее повышение вычислительной эффективности метода. Так, в своем докладе 2005 года [10] И. Матас и О. Чум предложили оптимальный метод оценивания моделей в парадигме RANSAC для случая с априори известной долей выбросов в исходном наборе данных, а также алгоритм «R-RANSAC с последовательным тестом отношения вероятностей», не требующий априорного знания о доле выбросов и дающий результаты, близкие к оптимальным. Авторами доклада экспериментально показано, что на тестовых данных последний метод работает до 10 раз быстрее, чем стандартный RANSAC.

Какой вывод можно сделать на основании изложенного выше? Развитие хафовских методов анализа изображений, понимаемых в смысле робастного оценивания, имеет на сегодняшний день мало перспектив в соотношении с парадигмой RANSAC: концепция Хафа о совместном голосовании в RANSAC выражена в полной мере, большинство возможных усовершенствований одинаково применимо в обоих случаях, при этом RANSAC изначально имеет принципиальное преимущество в эффективном использовании оперативной памяти.

Рассмотрим теперь другое направление исследования ПХ и методов его ускорения. В 1981 году Стэнли Динс обратил внимание [11] на чрезвычайное сходство преобразования Хафа и преобразования Радона, введенного последним еще в 1917 году [12]. В своей работе С. Динс утверждает, что преобразование Радона имеет все свойства ПХ (в переизложении Р. Дуды и П. Харта [4]), и предлагает обобщить преобразование Радона аналогично тому, как Р. Дуда и П. Харт вводят ОПХ. Главным выводом работы С. Динса является утверждение, что ПХ является частным случаем преобразования Радона. Этот довольно неожиданный вывод трудно обсуждать, поскольку его прямая аргументация в статье отсутствует, а из двух исследуемых преобразований только преобразование Радона вводится формально. Судя по общей канве работы, С. Динс подразумевает, что ПХ имеет входом список математических точек, а преобразование Радона – произвольную функцию. К сожалению, С. Динс в своей статье трактует ПХ как непрерывное преобразование, что не соответствует ни работам П. Хафа (там идет речь об электротехническом устройстве), ни его интерпретаторов, на которых С. Динс ссылается (у них результатом ПХ считается дискретное изображение).

В своем подробном обзоре, посвященном ПХ и опубликованном в 1988 году [13], Дж. Иллингворт и Дж. Киттлер рассматривают, в том числе, упомянутую работу С. Динса. Эти два исследователя формулируют связь преобразований несколько конкретнее. Вслед за С. Динсом они утверждают, что ПХ является частным случаем преобразования Радона, но добавляют, что для бинарных изображений преобразования совпадают. Заметим, что в обзоре, посвященном ПХ, не дается (традиционно для рассматриваемой области науки) его определения. Несмотря на это, можно утверждать, что выдвигаемый тезис об эквивалентности преобразований противоречит формализации А. Розенфельда, поскольку преобразование Радона дается в обзоре в аналитической непрерывной форме.

Прежде чем двигаться дальше, остановимся на основном способе ускорения ПХ, понимаемого как дискретный аналог преобразования Радона. Несмотря на то, что две несовпадающие прямые могут пересекаться только по нулевой мере, дискретные паттерны, их приближающие, могут иметь пересечение, составляющее значительную долю их размера. На рис. 3 приведен пример двух паттернов, размер пересечения которых составляет половину размера каждого из них. Повторное использование частичных сумм, соответствующих пересечениям нескольких паттернов, очевидно, может уменьшить требуемое число операций. Не очевидно, впрочем, что таким образом можно получить значительный выигрыш.

В 1992 году Мартин Брейди и Ванки Ён опубликовали свою без преувеличения прорывную работу о быстром приближенном дискретном преобразовании Радона [14]. Метод Брейди-Ёна

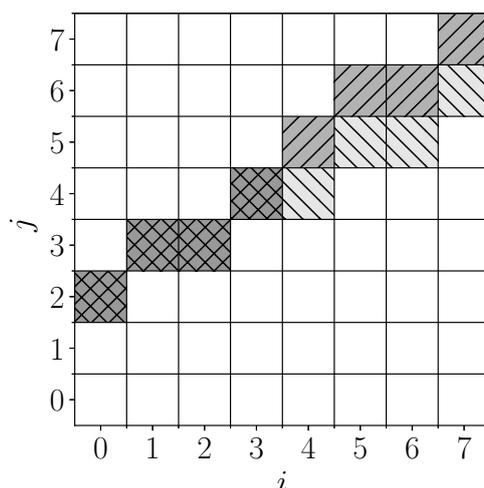


Рис. 3. Пересечение двух паттернов, аппроксимирующих близко расположенные прямолинейные отрезки. Штриховкой с наклоном влево обозначена индивидуальная часть паттерна с координатами $j = \lfloor 4/7 i + 2 \rfloor$, вправо – индивидуальная часть паттерна с координатами $j = \lfloor 5/7 i + 2 \rfloor$, «в клетку» – общая часть этих двух паттернов.

позволяет вычислять ПХ за $\Theta(n^2 \log n)$ суммаций, где n линейные размеры изображения, а не за $\Theta(n^3)$ суммаций, требуемых для прямого последовательного вычисления всех сумм. В своей работе авторы используют названия преобразований Хафа и Радона, как взаимозаменяемые, а во введении указывают (без ссылок и аргументации), что ПХ – это дискретное преобразование Радона от бинарного изображения. Такая позиция не противоречит ни определению преобразования Радона, ни пионерским работам о преобразовании Хафа. Тем не менее, в данной работе предлагается несколько иная интерпретация взаимосвязи рассматриваемых преобразований.

Будем называть преобразованиями Хафа различные дискретизации преобразования Радона на плоскости, равно как и преобразований интегрирования по линейным многообразиям в пространствах размерности 3 и выше, но только такие, которые определяются исключительно через операцию сложения. Прежде чем привести строгие определения, обсудим основания для подобного понимания ПХ. Предлагаемая формулировка отличается от позиции М. Брейди и В. Ёна двумя обобщениями. Рассмотрим их последовательно.

Требование бинарности входного изображения формально соответствует смыслу работ П. Хафа, однако принципиально только при понимании ПХ как робастного метода оценивания параметров облака точек. При рассмотрении же ПХ как линейного отображения из пространства входных изображений в аккумуляторное пространство (как это сделано у А. Розенфельда [3]), требование бинарности практически не влияет на структуру и свойства ПХ. Даже в алгоритмах, ускоряющих вычисление ПХ за счет игнорирования «нулевых» пикселей входного изображения, эксплуатируется не бинарность, а разреженность входного изображения (по аналогии с разреженными матрицами). Обратим также внимание на то, что в изложении А. Розенфельда рассматриваются два способа задания входных данных для ПХ: бинарное изображение и набор точек на плоскости. По-видимому, это связано с тем, что из патента П. Хафа [2] не вполне ясно, что именно подразумевал изобретатель. В некоторых его пояснениях рассматривается набор точек, в других обсуждается обработка яркостного изображения, включающая пороговые отсечения, превращающие полутоновое изображение в бинарное. Но два этих представления не эквивалентны. Бинарное изображение можно преобразовать без потерь в множество координат центров ненулевых пикселей, но корректный переход от набора точек именно к бинарному изображению возможен не всегда. Действительно, набор анализируемых точек может по смыс-

лу представлять собой не множество, а мультимножество. Но и в противном случае корректное преобразование будет возможно не при любом разрешении целевого бинарного изображения. При таком преобразовании изображение имеет смысл гистограммы, и ограничение возможных значений нулем и единицей выглядит искусственным.

Остановимся теперь на вопросе, почему конструктивно рассматривать в качестве ПХ (без предваряющего уточнения «обобщенного») дискретизации обобщения преобразования Радона на пространства высших размерностей. Во-первых, это традиция уже существует у исследователей ПХ. В работах Ф. Тарша-Курди с соавторами [15] и Д. Боррманна с соавторами [16] дискретное преобразование, соответствующее преобразованию Радона в трехмерном пространстве, называется не ОПХ, а трехмерным ПХ (при том, что работа Д. Балларда [5], вводящая термин ОПХ, им, очевидно, известна). Во-вторых, именно для этого класса преобразований существуют специализированные алгоритмы быстрого их вычисления [17], не переносимые напрямую на весь класс ОПХ.

Перед тем, как перейти к формальным определениям, рассмотрим еще один вопрос. Если речь идет о дискретных преобразованиях, приближающих преобразование Радона, то почему не назвать объект исследования дискретным преобразованием Радона? Во-первых, не всякое преобразование интегрирования по линейным многообразиям обязательно называют преобразованием Радона. Как правило, в прикладной научной литературе преобразованием Радона в пространстве любой размерности называется только преобразование, интегрирующее по гиперплоскостям, к прочим преобразованиям этот термин не применяется. В частности, преобразование, интегрирующее трехмерную функцию по прямым, называется преобразованием Йона (по имени Фрица Йона, использовавшего его в своей работе 1938 года при исследовании ультрагиперболических дифференциальных уравнений [18]). Оно используется при решении многих задач вычислительной рентгеновской томографии, отсюда и второе общепринятое его название – лучевое преобразование.

Во-вторых, для преобразования Радона, в отличие от преобразования Фурье, нет общепринятого определения его дискретного варианта. Так, в работах, исследующих быстрые алгоритмы вычисления дискретного преобразования Фурье, используется вариант дискретного преобразования Радона (восходящий к работе 1988 года И. Гертнера [19]), вычисляющего суммы по узлам (i, j) дискретного растра, координаты которых задаются линейными конгруэнтными последовательностями [20]:

$$j = k i + b \pmod{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i, j, k, b \in \mathbb{Z}_n, \quad (1)$$

где k и b – параметры последовательности, а n – линейный размер растра. Последовательности вида (1) – прямой аналог линейных функций для колец вычетов \mathbb{Z}_n , но в обработке изображений под дискретным преобразованием Радона обычно понимается преобразование, вычисляющее суммы по узлам дискретного растра, представляющим собой дискретные приближения линейных функций действительного аргумента:

$$j = [k i + b] \pmod{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_n, \quad k, b \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где квадратные скобки обозначают операцию округления.

На рис. 4 приведены примеры множеств, подлежащих суммации, для обоих вариантов определения дискретного преобразования Радона. Для определения (1) характерна несвязность соответствующих множеств на растре. Легко убедиться, что связность может быть достигнута только при $k \in \{0, 1, n - 1\}$. Напротив, для определения (2) характерны связные на растре множества узлов, достигаемые при $-1 \leq k \leq 1$. В данной работе (как и в подавляющем большинстве источников, в которых ПХ рассматривается как линейное отображение) именно последний вариант будет называться ПХ.

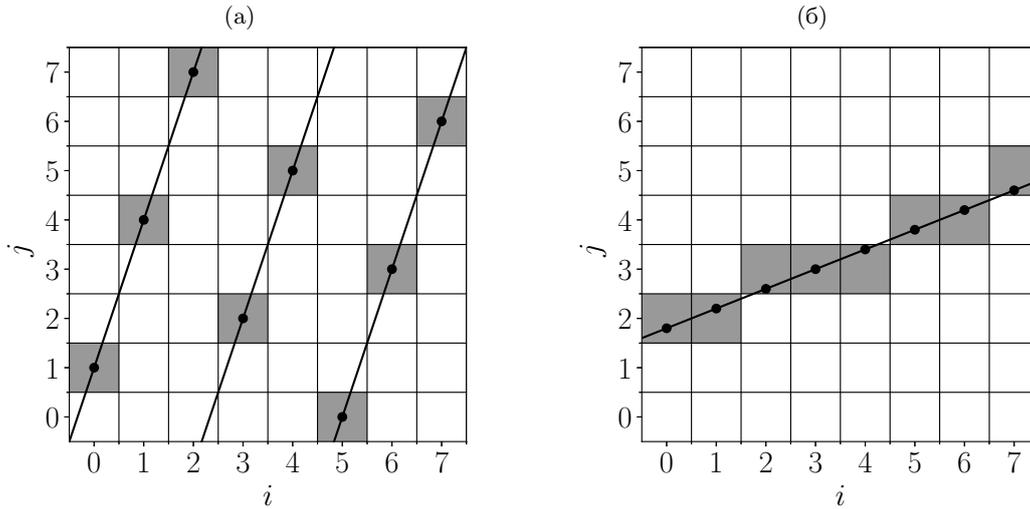


Рис. 4. Примеры множества узлов раstra (пикселей), сумма по которому равна значению дискретного преобразования Радона в некоторой точке: (а) для преобразования в смысле И. Гертнера ($k = 3, b = 1$) и (б) для преобразования, используемого в обработке изображений ($k = 0.4, b = 1.8$). Линейный размер раstra $n = 8$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПХ И ПХ КАК ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Перейдем теперь к формальным определениям. Преобразованием Радона на плоскости называют преобразование, ставящее в соответствие непрерывной финитной функции $f(x, y)$, определенной на \mathbb{R}^2 , множество ее интегралов по всевозможным прямым. При нормальной параметризации прямых результат преобразования Радона записывается как функция в координатах (ρ, φ) :

$$R[f(x, y)](\rho, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho \cos \varphi - a \sin \varphi, \rho \sin \varphi + a \cos \varphi) da, \tag{3}$$

где φ – угол наклона прямой, по которой вычисляется интеграл, а ρ – расстояние от нее до начала координат. Проекцией функции $f(x, y)$ под углом φ называется сечение (подмножество) $P_\varphi(\rho)$ Радон-образа, содержащее интегралы по всем прямым под этим углом: $P_\varphi(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} R[f(x, y)](\rho, \varphi)$, то есть Радон-образ – это многообразие проекций под всевозможными углами.

Преобразование Радона на плоскости является интегральным преобразованием и может быть переписано в соответствующей форме:

$$R[f(\mathbf{r})](\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^2} K_1^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \dim \mathbf{r} = \dim \mathbf{p} = 2, \tag{4}$$

$$K_1^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\mathbf{n}(p_2) \cdot \mathbf{r} - p_1), \quad \mathbf{n}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} [\cos \varphi \sin \varphi]^T,$$

где $\delta(\bullet)$ – функция Дирака, $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (\rho, \varphi)$, а $K_1^2(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ (ядро интегрального преобразования) является обобщенной функцией.

Аналогично записывается преобразование Радона в трехмерном пространстве $R_3[f(x, y, z)](\rho, \varphi, \theta)$ – преобразование интегрирования по всевозможным плоскостям:

$$R_3[f(\mathbf{r})](\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} K_2^3(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \dim \mathbf{r} = \dim \mathbf{p} = 3, \tag{5}$$

$$K_2^3(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\mathbf{n}(p_2, p_3) \cdot \mathbf{r} - p_1),$$

$$\mathbf{n}(\varphi, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} [\cos \varphi \sin \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \theta]^T,$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а $\mathbf{p} = (\rho, \varphi, \theta)$.

В трехмерном пространстве преобразованием Йона $J[f(x, y, z)](a, b, \varphi, \theta)$ называют преобразование интегрирования по всевозможным прямым:

$$\begin{aligned} J[f(\mathbf{r})](\mathbf{p}) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} K_1^3(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \dim \mathbf{r} = 3, \quad \dim \mathbf{p} = 4, \\ K_1^3(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &\stackrel{\text{def}}{=} \delta \left(\left\| Q(p_3, p_4)\mathbf{r} - [p_1 \ p_2]^T \right\|_2 \right), \\ Q(\varphi, \theta) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а $\mathbf{p} = (a, b, \varphi, \theta)$.

В прикладных работах рассматриваются в основном дискретизации этих трех интегральных преобразований, но общая теория может быть построена для любых преобразований интегрирования по всевозможным линейным многообразиям. Обозначим символом L_k^m преобразование интегрирования по линейным многообразиям размерности k в пространстве \mathbb{R}^m :

$$\begin{aligned} L_k^m[f(\mathbf{r})](\mathbf{p}) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} K_k^m(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \dim \mathbf{r} = m, \quad \dim \mathbf{p} = (m - k)(k + 1), \\ K_k^m(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &\stackrel{\text{def}}{=} \delta(d(\mathbf{r}, M_k^m(\mathbf{p}))), \quad m > k, \quad m, k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $M_k^m(\mathbf{p})$ – линейное многообразие размерности k в пространстве \mathbb{R}^m , задаваемое вектором параметров \mathbf{p} , а $d(\mathbf{r}, M)$ – евклидово расстояние от точки \mathbf{r} до линейного многообразия M . Нетрудно убедиться, что $R \equiv L_1^2$, $R_3 \equiv L_2^3$, $J \equiv L_1^3$, а общее определение ядер $K_k^m(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ в (7) не противоречит введенным ранее частным определениям (4), (5) и (6). Будем определять преобразования Хафа как дискретные приближения интегральных преобразований L_k^m .

Введем теперь необходимые для дальнейшего изложения дискретные структуры. Изображением (m -мерным изображением со сторонами $\mathbf{n} \stackrel{\text{def}}{=} (n_1, n_2, \dots, n_m)$) будем называть отображение $I_{\mathbf{n}}^m : \mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^m \rightarrow G$, где область определения $\mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^m \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^m \{0, 1, \dots, n_i - 1\} \subset \mathbb{R}^m$ называется растром, $m, n_i \in \mathbb{N}$, а $(G, +)$ – аддитивная абелева полугруппа. Пространство таких изображений будем обозначать $\mathbb{I}_{\mathbf{n}}^m$.

Изображение $I_{\mathbf{n}}^m$, где $n_i = n, i \in \mathbb{N}, i \leq m$, будем называть m -мерным равносторонним изображением со стороной n или изображением размера n^m . Такие изображения будем обозначать I_n^m , а их область определения – $\text{dom } I_n^m \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_n^m$. Аналогичную нотацию будем использовать и для прочих символов, значение которых зависит от размеров изображения.

Кортеж $\langle \mathbf{z}, v \rangle$, где $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^m, v \in G$, будем называть пикселем, вектор \mathbf{z} – позицией, его элементы – координатами (пикселя), а v – значением пикселя. Позицию с нулевыми координатами будем называть началом координат и обозначать $\mathbf{0}$.

Паттерном p размера l на фиксированном растре $\mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^m$ будем называть множество позиций $p \subset \mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^m, |p| = l$. Множество всевозможных паттернов на заданном растре будем обозначать $\mathbb{P}_{\mathbf{n}}^m$. Суммой по паттерну на изображении $I_{\mathbf{n}}^m$ будем называть сумму значений пикселей в позициях, принадлежащих паттерну: $\sum_p I_{\mathbf{n}}^m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbf{z} \in p} I_{\mathbf{n}}^m(\mathbf{z})$.

Обобщенным преобразованием Хафа H_P по множеству паттернов $P \subset \mathbb{P}_{\mathbf{n}}^m$ будем называть отображение из пространства исходных изображений $\mathbb{I}_{\mathbf{n}}^m$ в пространство изображений $\mathbb{I}_{\mathbf{n}'}^m$ (называемых Хаф-образами), такое, что $H_P [I_{\mathbf{n}}^m](\mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Q(\mathbf{z})} I_{\mathbf{n}}^m$, где $Q : \mathbb{Z}_{\mathbf{n}'}^m \rightarrow P \cup \emptyset$ – сюръекция, а $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{n}'}^m$. Сюръекцию Q будем называть параметризацией и относить ее к множеству паттернов P , преобразованию H_P и Хаф-образу $H_P [I_{\mathbf{n}}^m]$.

Как уже было упомянуто выше, в данной работе под преобразованиями Хафа предлагается понимать ОПХ, являющиеся дискретизациями интегральных преобразований вида (7). Формализуем это утверждение. Пусть $q \stackrel{\text{def}}{=} M_k^m(\mathbf{p})$ – линейное многообразие размерности k в пространстве \mathbb{R}^m , задаваемое вектором параметров \mathbf{p} , а $p \in \mathbb{P}_n^m$ – паттерн, заданный на растре соответствующей размерности. Обозначим как B_n^m ортотропный параллелепипед размерности m ($B_n^m \subset \mathbb{R}^m$), описывающий растр $Z_n^m: B_n^m \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^m [-0.5; n_i - 0.5)$. Будем называть ошибкой аппроксимации $E_{pq}(p, q, B)$ многообразия q паттерном p в параллелепипеде B расстояние Хаусдорфа между $q \cap B$ и p :

$$E_{pq}(p, q, B) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left(\sup_{\mathbf{x} \in q \cap B} \inf_{\mathbf{z} \in p} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2, \sup_{\mathbf{z} \in p} \inf_{\mathbf{x} \in q \cap B} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2 \right). \tag{8}$$

Ошибкой аппроксимации $E_{PM}(P, M, B)$ множества линейных многообразий M множеством паттернов P в параллелепипеде B назовем следующую величину:

$$E_{PM}(P, M, B) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left(\sup_{q \in Q(M, B)} \inf_{p \in P} E_{pq}(p, q, B), \sup_{p \in P} \inf_{q \in Q(M, B)} E_{pq}(p, q, B) \right), \tag{9}$$

$$Q(M, B) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in M \mid q \cap B \neq \emptyset\}.$$

Преобразованием Хафа H_k^m для линейных многообразий размерности k на изображениях размерности m будем называть ОПХ в следующем случае: ОПХ принадлежит последовательности преобразований $H^i, i \in \mathbb{N}$ для изображений одинаковой размерности m и возрастающего размера \mathbf{n}^i ($\dim \mathbf{n}^i = m, \max_{j=1}^m n_j^{i+1} > \max_{j=1}^m n_j^i$) такой, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{E_{PM}(P^i, M, B_{\mathbf{n}^i}^m)}{\max_{j=1}^m n_j^i} \rightarrow 0, \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \{M_k^m(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{(m-k)(k+1)}\}, \tag{10}$$

где P^i – множество паттернов преобразования H^i . Под преобразованием Хафа без уточнения размерности будем подразумевать классический случай прямых на плоскости ($m = 2, k = 1$).

3. ПРОВЕРКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПРИМЕРАХ

Проверим теперь адекватность предлагаемого определения на известных примерах. Начнем с классического ПХ (H_1^2). Рассмотрим последовательность преобразований равносторонних двумерных изображений $H^i: \mathbb{I}_{2i+1}^2 \rightarrow \mathbb{I}_{2i+1}^2, i \in \mathbb{N}$ с нечетным размером стороны. Введем для таких изображений два параметризованных семейства паттернов (Pnh_1^2 и Pnv_1^2), которые будем называть ближайшими аппроксимациями прямых:

$$\begin{aligned} Pnh_1^2(a, b, i) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \mid z_2 = [a z_1 + b]\} \cap \mathbb{Z}_{2i+1}^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad |a| \leq 1, \\ Pnv_1^2(a, b, i) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 \mid z_1 = [a z_2 + b]\} \cap \mathbb{Z}_{2i+1}^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad |a| \leq 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Использование такой дискретизация прямых – общепринятая практика в обработке изображений, восходящая к работам А. Розенфельда [21].

Введем следующую параметризацию Хаф-образа:

$$\begin{aligned} Q^i(\mathbf{z}) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Pnv_1^2(\cot \varphi, \rho \csc \varphi + i(1 - \cot \varphi), i), & \frac{\pi}{4} \leq |\varphi| < \frac{3\pi}{4}, \\ Pnh_1^2(\tan \varphi, \rho \sec \varphi + i(1 - \tan \varphi), i) \end{cases}, \\ \rho &\stackrel{\text{def}}{=} z_1 - i, \quad \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2i} z_2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_{2i+1}^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь (ρ, φ) – нормальные параметры прямой на исходном изображении, при условии, что начало координат помещено в центр изображения (центральный пиксель имеет координаты (i, i) на растре).

Растр Хаф-образа равномерно дискретизует пространство параметров в диапазоне $[-i, i]$ по ρ и $[0, \pi]$ по φ . Абсолютная ошибка дискретизации прямых паттернами Pnh_1^2 и Pnv_1^2 ограничена сверху конечной величиной, не зависящей от i (а именно, $1/\sqrt{2}$). Расстояние Хаусдорфа от любого отрезка из множества $Q(M_1^2, B_{2i+1}^2)$ до отрезка с ближайшими параметрами, представленными на растре Хаф-образа, также ограничено сверху конечной величиной, не зависящей от i . Отсюда следует, что условие (10) выполняется, и ОПХ, задаваемое параметризацией (12), является ПХ.

На рис. 5 проиллюстрировано применение так определенного ПХ к полутоновому изображению. Нетрудно заметить, что Хаф-образ представляет собой суперпозицию отрезков синусоид. По этой причине дискретизацию преобразования Радона в нормальной параметризации часто называют синограммой.

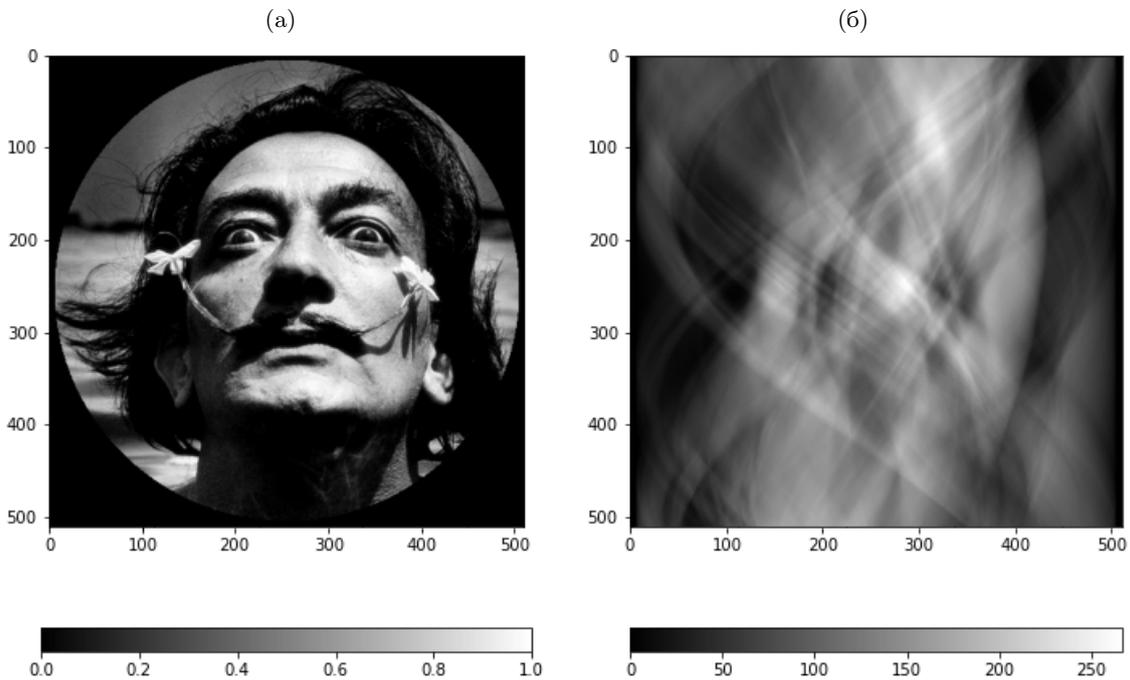


Рис. 5. Преобразование Хафа полутонового изображения размера 511×511 пикселей, заданное в нормальной параметризации (12): (а) исходное полутоновое изображение и (б) его Хаф-образ.

Рассмотрим теперь преобразование, вычисляемое быстрым алгоритмом Брейди-Ёна. Согласно предлагаемой терминологии, алгоритм Брейди-Ёна вычисляет ОПХ некоторого специального вида $BY_1^2: \mathbb{I}_{(w,h)}^2 \rightarrow \mathbb{I}_{(w,h)}^2$, причем $w = 2^l$, где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $h \in \mathbb{N}$. Размеры всех паттернов у этого ОПХ равны w , при этом алгоритм Брейди-Ёна требует $hw \log_2 w$ операций сложения.

Чтобы описать структуру этого ОПХ, определим дополнительные понятия. Для паттернов $p \in \mathbb{P}_n^m$ введем операцию циклического сдвига на $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^m: p \nearrow \mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} \{(z_i + s_i \pmod{n_i})_{i=1}^m \mid \mathbf{z} \in p\}$, при этом вектор \mathbf{s} будем называть величиной сдвига или сдвигом. Порождающими диадическими паттернами на плоскости будем называть паттерны $\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}(t) \in \mathbb{P}_{(w,h)}^2$, задаваемые

следующим рекуррентным выражением:

$$\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{(0, 0)\}, & w = 1 \\ \text{Pgd}_{(w/2,h)}^{2,1}(\lfloor t/2 \rfloor) \cup \left(\text{Pgd}_{(w/2,h)}^{2,1}(\lfloor t/2 \rfloor) \nearrow (w/2, \lceil t/2 \rceil) \right), & w > 1 \end{cases}, \quad (13)$$

$w = 2^l, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad h \in \mathbb{N},$

где $t \in \mathbb{Z}_w$ – параметр, который будем называть наклоном паттерна. Порождающие диадические паттерны обладают следующими свойствами: в каждом столбце $z_2 = \text{const}$ растра $\mathbb{Z}_{(w,h)}^2$ любому паттерну принадлежит ровно одна позиция; паттерн с наклоном $t < h$ проходит через позиции $\mathbf{0}$ и $(n - 1, t)$.

St-параметризацией паттернов $\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}(t)$ двумерного растра, для которых выполнены эти два свойства, будем называть сюръекцию $(s, t) \mapsto \text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}(t) \nearrow (0, s), \quad s \in \mathbb{Z}_h, \quad t \in \mathbb{Z}_w$. Теперь мы можем определить ОПХ Брейди-Ёна: Хаф-образ преобразования VY_1^2 на растре $\mathbb{Z}_{(w,h)}^2, \quad w = 2^l, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad h \in \mathbb{N}$ задается st-параметризацией порождающих диадических паттернов $\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}$.

Рассмотрим теперь связь ОПХ Брейди-Ёна с классическим ПХ для прямых. Порождающие диадические паттерны $\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}$ не совпадают с рассмотренными выше ближайшими паттернами (11) и аппроксимируют непрерывные прямые с меньшей точностью. На Рис. 6 для сравнения изображено максимальное (среди всех значений t) отклонение диадического паттерна от идеала для линейного размера изображения $w = 16$.

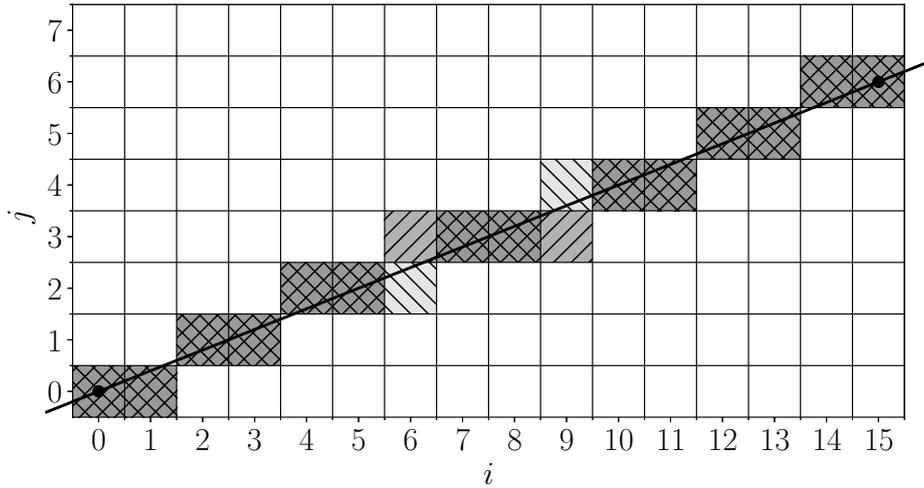


Рис. 6. Взаимное расположение идеальной прямой, ее наилучшей и диадической дискретизаций для $w = 16, t = 6$. Штриховкой с наклоном влево обозначена наилучшая дискретизация, вправо – диадическая.

Известная оценка сверху на отклонение координат позиции, участвующей в суммации, от идеальной прямой – $(\log_2 w)/6$ по координате z_2 [22] – сублинейна по размеру паттерна, что позволяет говорить об аппроксимации прямых диадическими паттернами. Тем не менее, преобразование VY_1^2 не удовлетворяет определению ПХ. Не каждый его паттерн аппроксимирует какую-либо прямую, и не каждая прямая, пересекающая изображение, аппроксимируется хотя бы одним паттерном из VY_1^2 . Рассмотрим оба несоответствия по очереди и покажем, как они могут быть устранены дополнительными действиями.

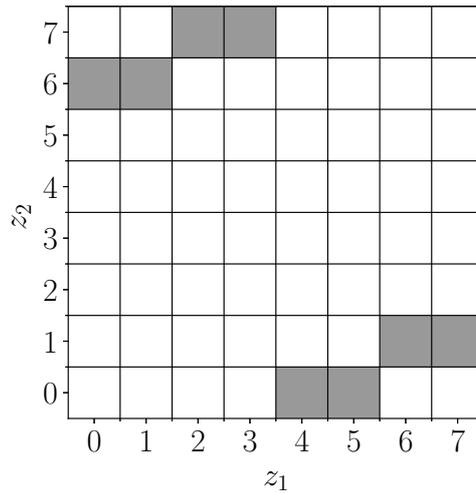


Рис. 7. Паттерн Брейди-Ёна из \mathbb{P}_n^2 с координатами $s = 3n/4$, $t = n/2 - 1$, не аппроксимирующий никакую прямую при $n \rightarrow \infty$. Здесь $n = 8$.

Порождающие паттерны $\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}$ аппроксимируют прямые, но множество паттернов преобразования BY_1^2 задано через применение циклических сдвигов к $\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}$. В результате не каждый паттерн BY_1^2 аппроксимирует какую-либо прямую. На рис. 7 приведен пример такого паттерна. По той же причине не каждая прямая, пересекающая изображение, оказывается аппроксимированной. Действительно, прямая $j = (n/2 - 1) i / (n - 1) + 3n/4$ не аппроксимируется ни одним из паттернов, поскольку все они содержат позиции в каждом столбце, а рассматриваемая прямая не пересекает правую половину изображения. Эти проблемы преодолеваются следующим образом. Пусть исходное изображение I_1 имеет растр $\mathbb{Z}_{(w,h)}^2$. Создадим дополнительное изображение I_2 с растром $\mathbb{Z}_{(w,h+w)}^2$, дополненное нулями:

$$I_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} I_1(i, j), & i \in \mathbb{Z}_w, j \in \mathbb{Z}_h \\ 0, & i \in \mathbb{Z}_w, j \in \mathbb{Z}_{h+w} \setminus \mathbb{Z}_h \end{cases} \quad (14)$$

Применим алгоритм Брейди-Ёна к I_2 . Получившийся Хаф-образ содержит нули и суммы значений изображения I_1 по порождающим диадическим паттернам $\text{Pgd}_{(w,h)}^{2,1}$, а также их сдвигам по оси z_2 раstra $\mathbb{Z}_{(w,h)}^2$. Сдвиг в данном случае не циклический, подмножество паттерна, находящееся вне изображения, не вносит возмущений в сумму. Поэтому результат преобразования изображения I_2 алгоритмом Брейди-Ёна является Хаф-образом изображения I_1 с системой паттернов, аппроксимирующих на растре $\mathbb{Z}_{(w,h)}^2$ прямые вида $j = a i + b$, $0 \leq a \leq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, пересекающие этот растр.

Получившееся ОПХ все еще не является ПХ, поскольку не все прямые, пересекающие растр, могут быть заданы указанным образом. Прямые вида $j = a i + b$, $0 \leq a \leq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ покрывают четверть углового диапазона всевозможных прямых. Эта проблема также легко устранима. Применяя алгоритм Брейди-Ёна с дополнением нулями к изображению I_1 , к его отражению по оси z_1 , а также к результату транспонирования этих изображений, получим ОПХ для всего многообразия прямых, то есть ПХ.

Пусть дано изображение размером $n \times n$, причем $n = 2^l$, $l \in \mathbb{N}$. Алгоритм Брейди-Ёна позволяет за $8n^2(1 + \log_2 n)$ операций суммирования построить массив размера $2n \times 4n$, каждый элемент которого содержит ноль или сумму значений входного массива по дискретному паттерну, приближающему прямую с параметрами, задаваемыми координатами элемента выходного массива.

Используя нормальную параметризацию, обозначим координаты прямой l , вдоль которой требуется вычислить сумму, как (φ_l, ρ_l) . При вычислении ПХ методом Брейди-Ёна суммы вдоль прямых с φ_l в четырех диапазонах ($[0^\circ, 45^\circ]$, $[45^\circ, 90^\circ]$, $[90^\circ, 135^\circ]$ и $[135^\circ, 180^\circ]$) рассчитываются независимо, формируя подмассивы размера $2n \times n$.

Рассмотрим третий угловой диапазон, $\varphi_l \in [90^\circ, 135^\circ]$. В ячейке с координатами (s, t) соответствующего подмассива алгоритмом Брейди-Ёна формируется сумма вдоль прямой, проходящей через центр ячейки s нулевого столбца и центр ячейки $s+t$ последнего столбца входного массива (см. рис. 8). Нормальные координаты соответствующей прямой связаны с координатами ячейки следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \varphi_l = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{t}{n-1} \\ \rho_l = s \frac{n-1}{\sqrt{t^2 + (n-1)^2}} \end{cases} . \quad (15)$$

Для других диапазонов углов система координат (s, t) вводится симметричным образом.

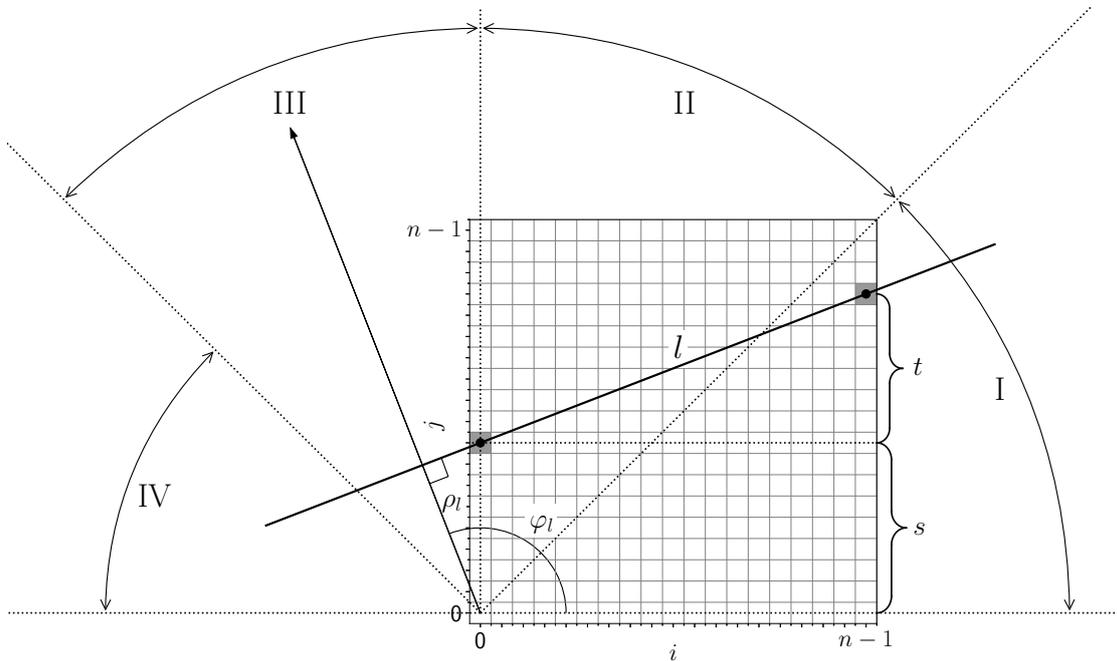


Рис. 8. Связь между нормальными параметрами (φ_l, ρ_l) прямой и координатами (s, t) . Римскими цифрами обозначены 4 угловых диапазона. Прямая l относится к диапазону III.

В такой параметризации на изображении размера $n \times n$ существуют n^2 дискретных прямых в каждом угловом диапазоне. Поэтому прямая реализация дискретного преобразования Радона в ней имеет вычислительную сложность $\Theta(n^3)$ [23]. В тех же условиях сложность метода Брейди-Ёна составляет $\Theta(n^2 \log n)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе впервые дается определение преобразования Хафа, понимаемого как отображение между дискретными изображениями различных размеров и размерностей, для вычисления которых достаточно операции сложения. В предлагаемом определении подразумевается, что термин «преобразование Хафа» относится не к одному конкретному преобразованию,

а ко всем представителям некоторого семейства отображений. Эти отображения отличаются размерами и размерностями изображений, составляющих область определения, а также параметризациями прямых, задающими область значений. Кроме того, они различаются по используемому виду аппроксимации прямых и иных линейных многообразий. Предлагаемое определение соответствует как классическому способу вычисления Хаф-образа от полутонного изображения, так и алгоритму Брейди-Ёна быстрого его построения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hough P. V. C. Machine Analysis of Bubble Chamber Pictures. *Proc., 2nd International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation, HEACC 1959*. Geneva: CERN, 1959, vol. 590914, pp. 554–558.
2. Hough P. V. C. Method and means for recognizing complex patterns. *Patent US 3069654 A*, 1962.
3. Розенфельд А. *Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин*. М.: Мир, 1972.
4. Duda R. O., Hart P. E. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. *Commun. ACM*, 1972, vol. 15, no. 1, pp. 11–15.
5. Ballard D. H. Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes. *Pattern Recognition*, 1981, vol. 13, no. 2, pp. 111–122.
6. Xu L., Oja E., Kultanen P. A new curve detection method: Randomized Hough transform (RHT). *Pattern Recognition Letters*, 1990, vol. 11, no. 5, pp. 331–338.
7. Fischler M. A., Bolles R. C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. *Commun. ACM*, 1981, vol. 24, no. 6, pp. 381–395.
8. Schnabel R., Wahl R., Klein R. Efficient RANSAC for Point-Cloud Shape Detection. *Computer Graphics Forum*, 2007, vol. 26, no. 2, pp. 214–226.
9. Sangappa H. K., Ramakrishnan K. R. A probabilistic analysis of a common RANSAC heuristic. *Machine Vision and Applications*, 2019, vol. 30, no. 1, pp. 71–89.
10. Matas J., Chum O. Randomized RANSAC with sequential probability ratio test. *Proc. Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1*. Beijing, 2005, vol. 2, pp. 1727–1732.
11. Deans S. R. Hough Transform from the Radon Transform. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1981, vol. PAMI-3, no. 2, pp. 185–188.
12. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsische Akademie der Wissenschaften*, 1917, vol. 69, pp. 262–277.
13. Illingworth J., Kittler J. A survey of the hough transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1988, vol. 44, no. 1, pp. 87–116.
14. Brady M. L., Yong W. Fast Parallel Discrete Approximation Algorithms for the Radon Transform. *SPAA'92 Proceedings of the fourth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*. 1992, pp. 91–99.
15. Tarsha-Kurdi F., Landes T., Grussenmeyer P. Hough-Transform and Extended RANSAC Algorithms for Automatic Detection of 3D Building Roof Planes from Lidar Data. *ISPRS Workshop on Laser Scanning 2007 and SilviLaser 2007*. Espoo, 2007, vol. XXXVI, pp. 407–412.
16. Borrmann D., Elseberg J., Lingemann K., The 3D Hough Transform for plane detection in point clouds: A review and a new accumulator design. *3D Research*, 2011, vol. 2, no. 2, art. no. 3, pp. 1–13.
17. Wu T.-K., Brady M. L. A fast approximation algorithm for 3D image reconstruction. *Proc. 1998 International Computer Symposium. Workshop in Image Processing and Character Recognition*. Tainan, 1998, pp. 213–220.

18. John F. The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables. *Duke Mathematical Journal*, 1938, vol. 4, no. 2, pp. 300–322.
19. Gertner I. A new efficient algorithm to compute the two-dimensional discrete Fourier transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, vol. 36, no. 7, pp. 1036–1050.
20. Yang D. Fast discrete Radon transform and 2-D discrete Fourier transform. *Electronics Letters*, 1990, vol. 26, no. 8, pp. 550–551.
21. Rosenfeld A. Digital Straight Line Segments. *IEEE Transactions on Computers*, 1974, vol. C-23, no. 12, pp. 1264–1269.
22. Карпенко С. М., Ершов Е. И. Исследование свойств диадического паттерна быстрого преобразования Хафа. *Проблемы передачи информации*, 2021, Т. 57, № 3, стр. 102–111.
23. Brady M. L. A fast discrete approximation algorithm for the Radon transform. *SIAM Journal on Computing*, 1998, vol. 27, no. 1, pp. 91–99.

On the Hough transform definition

D. P. Nikolaev

The Hough transform is a robust digital image processing tool that has garnered significant attention and application in various scientific studies. However, a comprehensive analysis of existing literature indicates the absence of a precise definition for this mathematical concept. Moreover, there are two distinct interpretations of the Hough transform that diverge considerably. This research delves into both interpretations and ultimately emphasizes the version that views the Hough transform as a mapping between discrete images of varying sizes and dimensions, attributing it greater importance. Consequently, a mathematical definition for this captivating concept is proposed.

KEYWORDS: Hough transform, discrete Radon transform.