

О повышении интерпретируемости искусственных нейронных сетей на примере задач вычисления цен опционов¹

О.Е. Кудрявцев^{*,**}, Д.В. Постолова^{*,**}

^{*} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^{**} ООО НПФ «ИнВайз Системс», Ростов-на-Дону, Россия

Поступила в редколлегию 02.10.2024 г. Принята 01.12.2024 г.

Аннотация—В данной работе мы показываем как повысить интерпретируемость нейросетей на примере стандартных задач вычислительной финансовой математики. В рамках нашего первого подхода мы обосновываем, что нейросеть прямого распространения с одним скрытым слоем и положительными весами - это естественный аппроксиматор для общих функций распределения непрерывных случайных величин. С помощью такого рода интерпретации, мы строим такую архитектуру нейронной сети, которая в результате обучения приводит к нейросетевому аналогу классической формулы Блэка-Шоулза. Главное преимущество нашего второго подхода для численного решения уравнения Блэка-Шоулза заключается в том, что на основе теоретически обоснованных формул для аппроксимирующей нейросети мы можем аналитически вычислять функцию потерь на каждой итерации обучения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: искусственные нейронные сети, вычислительная финансовая математика, модель Блэка-Шоулза.

DOI: 10.53921/18195822_2024_24_4_405

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной вычислительной финансовой математике нейросетевые технологии приобретают все большую значимость. Искусственные нейронные сети (ИНС) позволяют аппроксимировать сложные нелинейные функции, что делает их полезными в задачах интерполяции, оптимизации, решения уравнений в частных производных и других вычислительных задачах. В [1, 2] доказаны теоремы, обосновывающие возможность применения искусственных нейросетей различной архитектуры для аппроксимации непрерывных функций многих переменных на компакте. Указанные результаты получили название теорем универсальной аппроксимации. В отличие от классических подходов, ИНС могут выявлять скрытые закономерности и обеспечивать хорошую точность при решении задач с высокой размерностью. Более того, нейросети могут быть использованы как компоненты гибридных численных методов, реализуя рутинные часто повторяющиеся блоки алгоритма (см., например, [3]). Таким образом, применение искусственных нейросетей в вычислительной математике открывает новые горизонты для решения сложных вычислительных задач, в том числе в комбинации с традиционными численными методами.

Следует выделить несколько исследований, в которых рассматриваются различные аспекты применения нейросетей в финансовой математике. В статье [4] обсуждается применение

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00474, <https://rscf.ru/project/23-21-00474/>)

нейросетей в области корпоративных финансов, акцентируя внимание на прогнозировании банкротства компаний с помощью однослойных нейросетей. Этот подход демонстрирует связь между структурой капитала и корпоративной производительностью, а также улучшает результаты прогнозирования. Кроме того, использование карт самоорганизации Кохонена для анализа качественных переменных позволяет глубже понять влияние финансовых структур на эффективность компаний.

Исследование [5], представляет два альтернативных метода для аппроксимации функций в финансовых приложениях: *generalized stochastic sampling (gSS)* и *functional tensor train (fTT)*. Эти методы являются высокоэффективными заменителями глубоких нейронных сетей и превосходят их в типичных финансовых задачах. Важным преимуществом данных методов является их способность удовлетворять строгим требованиям финансовых приложений, таким как предсказуемость и объяснимость.

В работе [6] разработан гибридный численный метод “*deep parametric PDE*”, который сочетает в себе эффективность глубокого обучения для высокоразмерных задач с классическими подходами к решению уравнений в частных производных. Этот метод демонстрирует высокую производительность в задачах, таких как оценка кредитного риска контрагентов, и обладает свойством размерно-независимой сходимости для глубоких нейронных сетей с гиперболическим тангенсом в качестве функции активации.

Авторы исследования [7] рассматривают использование нейросети с долгой краткосрочной памятью (англ. LSTM) для прогнозирования финансовых временных рядов. Модель LSTM решает проблемы, связанные с нелинейностью и нестационарностью данных, что делает ее эффективной для краткосрочного и долгосрочного прогнозирования в финансовой сфере. В ходе исследования было доказано, что нейросеть с долгой краткосрочной памятью превосходит другие методы в задачах прогнозирования с многими шагами вперед, что позволяет применять ее для анализа временных рядов на финансовых рынках.

Статья [8] посвящена применению нейронных сетей для решения задачи покрытия многокомпонентных выплат ванильными опционами на корзину активов. В частности, предлагается использовать однослойные нейронные сети прямого распространения с функцией активации ReLU для аппроксимации таких выплат. Результаты [8] показывают, что предлагаемый метод обеспечивает более точные результаты хеджирования по сравнению с традиционными методами, основанными на опционах на один актив, что делает данный подход перспективным для финансового рынка.

В [9] рассматривается влияние вычислительной математики на современные финансовые рынки и подчеркивается роль нейронных сетей и других методов машинного обучения в улучшении прогноза финансовых рынков и оптимизации управления рисками. В указанной работе обсуждаются возможности применения этих технологий для оценивания деривативов и повышения эффективности финансовых операций.

Исследования [3, 10] фокусируются на применении искусственных нейронных сетей для моделирования процессов Леви при построении методов Монте-Карло. Нейросети предлагается применять для аппроксимации функций распределений процесса Леви и его экстремумов. Более того, в [10] доказаны вероятностные аналоги теорем универсальной аппроксимации.

Таким образом, нейронные сети стали важным инструментом в вычислительной математике, значительно расширив возможности решения сложных финансовых задач. Теоремы универсальной аппроксимации заложили теоретическую основу для широкого применения нейросетей, а дальнейшие исследования продемонстрировали их эффективность в таких областях, как прогнозирование финансовых временных рядов, оценка цен опционов, моделирование рисков и в других финансовых аспектах.

Однако искусственные нейронные сети часто рассматриваются как “черный ящик”, что создает сложности в понимании их внутренней структуры и интерпретации получаемых результатов. В рамках данной работы мы стремимся прояснить эти проблемные аспекты на примере применения нейросетей для вычисления цен опционов в модели Блэка-Шоулза [11]. Учитывая, что непрерывные возрастающие сигмоидные функции активации нейросети можно интерпретировать как функции распределения непрерывных случайных величин, нейросеть прямого распространения с одним скрытым слоем и положительными весами – это естественный аппроксиматор для общих функций распределения непрерывных случайных величин. С другой стороны, цена опциона может быть записана в виде линейной комбинации функций распределения случайных величин, связанных с процессом, моделирующим базовый актив. С помощью такого рода интерпретации, при правильно подобранной структуре нейросети и входных параметрах мы показываем как “переоткрыть” знаменитую формулу Блэка-Шоулза.

В работе будет исследована возможность применения нейросетей для решения уравнения Блэка-Шоулза, с целью разработки более эффективных и интерпретируемых методов. Главное преимущество нашего второго подхода для численного решения уравнения Блэка-Шоулза заключается в том, что на основе теоретически обоснованных формул для аппроксимирующей нейросети мы сможем в явном виде вычислять функцию потерь на каждой итерации обучения.

Основная цель статьи – показать как повышать интерпретируемость нейросетей на примере стандартных задач вычислительной финансовой математики.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе мы рассматриваем основные понятия теории искусственных нейронных сетей, включая их определение, основные теоремы универсальной аппроксимации, архитектуры сетей и используемые программные библиотеки. Второй раздел напоминает читателю особенности модели Блэка-Шоулза для вычисления стоимости опционов, включая как саму формулу, так и уравнение Блэка-Шоулза. Третий раздел посвящен характеристике особенностей применения инструментария ИНС для разработки интерпретируемых методов вычисления цен опционов. Четвёртый раздел содержит описание вычислительных экспериментов и их результатов, демонстрируя практическую применимость предложенных методов. Заключение подчёркивает важность и потенциал нейронных сетей для вычислительной финансовой математики и предлагает направления для будущих исследований.

2. ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОСЕТИ: ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ И МОДЕЛИ

Искусственная нейронная сеть (ИНС) — это вычислительная модель, построенная по аналогии с биологическими нейронными сетями, то есть сетей нервных клеток живого организма. Основой каждой нейросети является искусственный нейрон, который выполняет функцию обработки информации. Нейрон принимает на вход набор данных, умножает их на веса, которые регулируются в процессе обучения, и применяет функцию активации для передачи результата дальше (в простейшем случае, преобразуя входные данные в 0 или 1). Математически нейрон в нейросети можно описать как элемент, который принимает на вход набор значений x_1, x_2, \dots, x_n умножает их на веса w_1, w_2, \dots, w_n (англ. - weights), суммирует полученные результаты, добавляет смещение θ (англ. - bias) и применяет нелинейную функцию активации $s(\cdot)$. Для каждого нейрона формула его работы имеет следующий вид:

$$o = s \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + \theta \right),$$

где o — выходное значение нейрона.

Нейронные сети представляют собой набор таких нейронов, сгруппированных в слои. Входные данные обрабатываются сначала на первом слое (входном), затем передаются на один или

несколько скрытых слоев, и, наконец, на выходной слой. Эта каскадная структура позволяет нейросети решать сложные задачи, такие как классификация и аппроксимация функций. Основной задачей нейронной сети является настройка весов таким образом, чтобы минимизировать ошибку между предсказанным и истинным значением. Этот процесс осуществляется с использованием алгоритмов обучения, таких как градиентный спуск и его модификации, которые регулируют веса для улучшения точности модели.

Теоремы универсальной аппроксимации, доказанные в [1, 2], обосновывают способность ИНС решать широкий спектр задач вычислительной математики. Основное утверждение в работе Дж. Цыбенко [1] состоит в том, что многослойный перцептрон с одним скрытым слоем и сигмоидной функцией активации способен аппроксимировать любую непрерывную функцию на компактном множестве с произвольной точностью. Это фундаментальное утверждение сделало возможным применение нейросетей для решения множества прикладных задач, от распознавания образов до задач прогнозирования.

Пусть $s(\cdot)$ — произвольная непрерывная сигмоидная функция на вещественной прямой, I_n — компакт в \mathbf{R}^n . Тогда согласно [1], конечные суммы вида

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j s(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j), \mathbf{x} \in I_n, \mathbf{w}_j \in \mathbf{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbf{R}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

плотны в пространстве непрерывных функций $C(I_n)$. Иными словами, для любой функции $f \in C(I_n)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует сумма $G(\mathbf{x})$ вида (1), такая, что

$$|G(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \epsilon \text{ для всех } \mathbf{x} \in I_n.$$

Это утверждение доказывает, что любая непрерывная функция может быть аппроксимирована нейронной сетью с одним скрытым слоем и подходящей активационной функцией с произвольной точностью. Теорема Хорника [2] расширяет идею универсальной аппроксимации на более сложные классы функций активации и архитектуры сетей. Согласно его теореме, многослойные нейронные сети с нелинейными функциями активации могут аппроксимировать любые непрерывные функции не только на компактных множествах, но и в более сложных пространствах.

Архитектура ИНС может варьироваться в зависимости от задачи, которую необходимо решить. Среди основных архитектур выделяют:

- Полносвязные сети (FNN) представляют собой наиболее простую архитектуру, где каждый нейрон предыдущего слоя связан с каждым нейроном последующего. Такая архитектура используется для задач аппроксимации функций.

- Сверточные сети (CNN) используются в задачах распознавания изображений, где каждый нейрон обрабатывает локальные области входных данных.

- Рекуррентные сети (RNN) применяются для работы с последовательными данными, такими как временные ряды или текст, позволяя учитывать предыдущие состояния для предсказания текущего значения.

- Глубокие нейронные сети (DNN) включают в себя несколько скрытых слоев, что позволяет моделировать сложные зависимости в данных и аппроксимировать высокоразмерные функции.

Для работы с нейронными сетями используются различные библиотеки машинного обучения, которые предоставляют готовые инструменты для построения, обучения и тестирования моделей. В данной работе были использованы следующие библиотеки:

— PyTorch: предоставляет гибкий и мощный интерфейс для создания и обучения нейронных сетей. Данная библиотека поддерживает автоматическое дифференцирование, что упрощает реализацию обратного распространения ошибки.

— NumPy: библиотека для работы с многомерными массивами данных и выполнения численных операций.

— Pandas: предоставляет средства для работы с таблицами и структурированными данными.

— Scikit-learn: включает в себя инструменты для предобработки данных и базовые методы машинного обучения.

— SciPy: используется для выполнения математических расчетов, включая методы оптимизации и статистики.

— Matplotlib: библиотека для визуализации данных.

— torch.optim: предоставляет различные алгоритмы оптимизации, например, стохастический градиентный спуск (SGD).

В рамках нашего исследования одним из требований к моделям нейросетей было ограничение на неотрицательность весов для обеспечения монотонности аппроксимируемых функций. В PyTorch такая функциональность отсутствует в виде встроенного механизма, и была реализована нами вручную. В другой библиотеке машинного обучения TensorFlow реализация ограничения на неотрицательность весов осуществляется встроенным механизмом через параметр `kernel_constraint = constraints.NonNeg()`. Это позволяет автоматически применять ограничения на веса после каждого шага обновления оптимизатора.

Эти инструменты вместе обеспечивают эффективную разработку и обучение моделей ИНС для различных задач, таких как аппроксимация функций и численные расчеты в финансовой математике.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕН ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА

Ценообразование опционов является одной из ключевых задач в финансовой математике. На протяжении последних пятидесяти лет модель Блэка-Шоулза используется на биржах в качестве основного ориентира для оценки стоимости европейских опционов. Она позволяет вычислить теоретическую цену опциона call, учитывая текущую цену акции S , цену исполнения K , срок действия опциона T , безрисковую процентную ставку r и волатильность σ . В этой модели предполагается, что цена базового актива $S_t = S e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t}$ следует геометрическому броуновскому движению, где W_t – винеровский процесс.

По определению цена европейского опциона call (на покупку) в начальный момент времени равна

$$V_{call} = e^{-rT} \mathbf{E}[\max(0, S_T - K)], \quad (2)$$

Учитывая, что дисконтированный процесс базового актива $e^{-rt} S_t$ является мартингалом (см. детали в [11]), $\mathbf{E}[e^{-rT} S_T] = S$ и формулу (2) можно переписать в виде:

$$V_{call}(S) = S \mathbf{P}(\tilde{S}_T < K) - e^{-rT} K \mathbf{P}(S_T < K), \quad (3)$$

где плотности вероятностей p_{S_T} и $p_{\tilde{S}_T}$ случайных величин S_T и \tilde{S}_T , соответственно, связаны следующим соотношением

$$p_{\tilde{S}_T}(y) = e^{-rT} y p_{S_T}(y) / S. \quad (4)$$

Напомним, что функция $F(x) = P(X < x)$ называется функцией распределения случайной величины X . Таким образом, формула (3) означает, что цена опциона call представима в виде

линейной комбинации функций распределений двух случайных величин. Заметим, что формулы (3)-(4) справедливы и для более общих экспоненциальных моделей Леви, если процесс начинается в точке S .

В классической работе [11] в указанном виде выведена знаменитая формула Блэка-Шоулза для цены европейского опциона call:

$$V_{call}(S, K, T, \sigma, r) = S\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-), \quad (5)$$

где

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (6)$$

а функция $\Phi(x)$ в (5) представляет собой функцию распределения нормированной нормальной величины и выражается через интеграл Лапласа (7).

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz. \quad (7)$$

Эта функция определяет вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, примет значение меньше x .

Аналитические формулы вида (5) для цены европейского опциона могут быть получены как решение задачи Коши для уравнения Блэка-Шоулза. Уравнение Блэка-Шоулза в логарифмической шкале — это дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее динамику цены опциона как функцию времени и логарифма цены базового актива:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0, \quad (8)$$

где $V(x, t)$ — цена опциона,

$x = \log(S/K)$ — логарифм приведенной цены базового актива,

σ — волатильность,

r — безрисковая процентная ставка,

t — время до истечения опциона.

При вычислении цены европейского опциона уравнение (8) снабжается начальным условием при $t = 0$, которое задает выплату $G(S)$ опциона при его исполнении:

$$V(x, 0) = G(Ke^x).$$

В частности, для опциона put (на продажу)

$$V(x, 0) = \max(0, K - Ke^x), \quad (9)$$

а для опциона call (на покупку)

$$V(x, 0) = \max(0, Ke^x - K). \quad (10)$$

4. НЕЙРОСЕТИ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ОПЦИОНОВ

Рассмотрим два подхода к применению нейронных сетей для вычисления цен опционов в модели Блэка-Шоулза. Первый подход применяется нами для модели Блэка-Шоулза, параметры которой могут принимать любые типовые значения, а второй для фиксированного набора параметров.

В первом случае мы опираемся на представление (3) цены опциона в виде линейной комбинации функций распределения случайных величин. Как отмечалось выше, сигмоидные функции активации являются функциями распределения некоторых случайных величин. Верно и обратное утверждение: функция распределения случайной величины может быть функцией активации в нейросети Цыбенко. По сути, формулу (5) можно рассматривать в терминах нейросети с тремя входными параметрами

$$x_1 = \frac{\ln S/K}{\sigma\sqrt{T}}, x_2 = \frac{rT}{\sigma\sqrt{T}} \left(= \frac{r\sqrt{T}}{\sigma} \right), x_3 = \frac{\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \left(= \sigma\sqrt{T} \right) \quad (11)$$

и двумя нейронами на выходе с функцией активации вида (7). Веса для первого выходного нейрона будут $\mathbf{w}_1 = (1; 1; 0.5)$, а для второго $\mathbf{w}_2 = (1; 1; -0.5)$. Смещение будет нулевым для обоих выходных нейронов. Таким образом, нейросеть с описанной архитектурой действует следующим образом:

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\Phi(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{x}), \Phi(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{x})). \quad (12)$$

Далее, значение первого выходного нейрона домножается на S , а второго на $-Ke^{-rT}$ и результаты складываются:

$$V_{call}(S, K, T, \sigma, r) = S\Phi(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{x}) - Ke^{-rT}\Phi(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{x}). \quad (13)$$

Набор параметров (x_1, x_2, x_3) в (11) можно интерпретировать как ключевые характеристики модели – приведенная начальная цена в логарифмической шкале $\ln S/K$, показатель дисконтирования rT и дисперсия $\ln S_T/S$, нормированные по среднеквадратическому отклонению величины $\ln S_T/S$.

Отметим, что с вычислительной точки зрения $\Phi(x)$ проигрывает более простым функциям активации, например, логистической регрессии. На следующем шаге мы построим нейросеть вида (14) для вычисления значений $\Phi(x)$.

$$F(z) = \sum_{j=1}^{10} \alpha_j s(\beta_j z + \theta_j), z \in [-3, 3], \alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0, \theta_j \in \mathbf{R}, \quad (14)$$

где $s(x) = e^x/(1 + e^x)$. Диапазон значений z выбран с учетом того факта, что нормированная нормальная случайная величина принимает значения в промежутке $[-3, 3]$ с вероятностью 0.9973.

Архитектура нейросети для аппроксимации $\Phi(x)$ включает в себя три слоя, которые последовательно преобразуют входные данные. Входной нейрон проходит через линейные преобразования с весами размерностью (10, 1) и передает полученные значения в 10 нейронов скрытого слоя. На скрытом слое применяется сигмоидная функция активации (логистическая функция), чтобы получить значения в диапазоне от 0 до 1, которые можно интерпретировать как вероятности. Выходной нейрон соединен с 10 нейронами предыдущего слоя, к которым применяется линейное преобразование с весами размерностью (1, 10). Используя обратное распространение ошибки для обновления весов модели, минимизируется ошибка аппроксимации. Для того чтобы значения, предсказанные нейросетью, были неотрицательными и возрастали с ростом значений входного нейрона, адекватно моделируя поведение $\Phi(x)$, мы накладываем условие неотрицательности на веса и обнуляем смещение на выходном слое. Как показывают вычислительные эксперименты в следующем разделе 10 нейронов на скрытом слое вполне достаточно для приближения $\Phi(x)$ с высокой точностью. Более того, построенная нейросеть может интерпретироваться как приближение нормированной нормальной величины смесью из десяти логистических распределений.

После того как $\Phi(x)$ аппроксимирована, ее значения могут быть использованы для расчета цены опциона по формуле (13) с помощью нейросети (12). Объединяя модели (12) и (14), построим следующую искусственную нейронную сеть \mathbf{G} прямого распространения с двумя скрытыми слоями и входным слоем (11):

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (G_1(\mathbf{x}), G_2(\mathbf{x})), \quad (15)$$

где

$$G_k(\mathbf{x}) = F(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^3, \quad k = 1, 2,$$

а компонента нейросети $F(z)$ описывается (14).

Обучение нейросети данной архитектуры будем проводить, минимизируя среднюю квадратическую ошибку приближения цены опциона call $V_{call}(S, K, T, \sigma, r)$ выражением $SG_1(\mathbf{x}) - Ke^{-rT}G_2(\mathbf{x})$. Построенная нами структура нейронной сети для аппроксимации цен опционов в модели Блэка-Шоулза представлена на рис. 1.

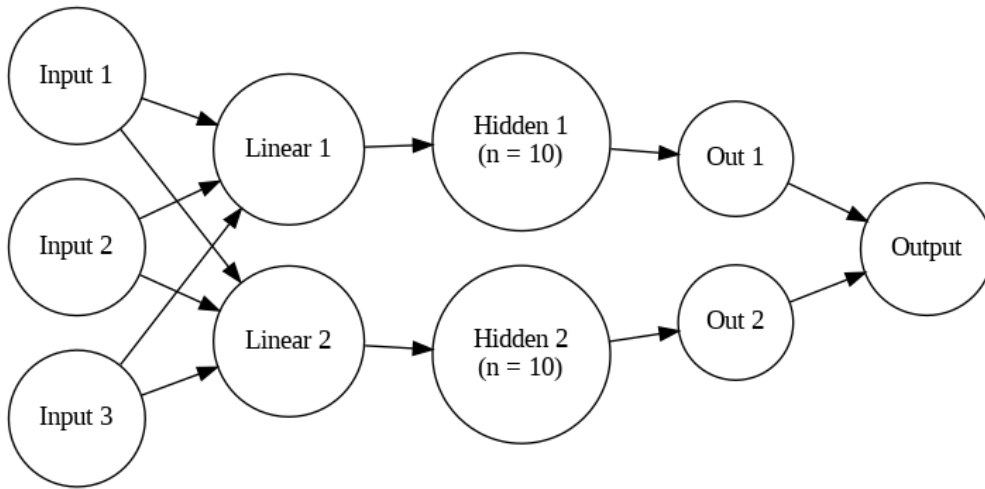


Рис. 1. Архитектура модели ценообразования опционов

Входной слой модели (15) состоит из трех нейронов, которые принимают на вход три ключевых параметра (11). Далее, каждый из этих входных нейронов подключается к двум отдельным нейронам с линейной функцией активации. Эти линейные нейроны играют роль фильтров, обеспечивающих необходимую обработку входных данных перед их подачей на следующий уровень сети.

Особенностью предложенной архитектуры является то, что первый линейный нейрон передает свои выходные данные через десять нейронов скрытого слоя, а затем соединяется с первым выходным нейроном y_1 . Аналогичным образом, действует второй линейный и соединяется со вторым выходным нейроном y_2 , при этом согласно (15), скрытый слой из 10 нейронов и в первом и во втором случаях описывается одной и той же моделью (14).

Результаты экспериментов показали, что эта архитектура позволяет достичь высокой точности предсказаний, с минимальной средней квадратичной ошибкой и высокой вероятностью правильного выполнения оценок в различных рыночных условиях. После обработки результаты объединяются и формируют окончательный выходной тензор. После этого полученные значения y_1 и y_2 домножаются на S и $-Ke^{-rT}$ соответственно, для получения итоговой цены опциона call.

Нашим вторым подходом будет построение ИНС для численного решения уравнения Блэка-Шоулза, которое является основным аналитическим инструментом для оценки стоимости опционов различных типов в финансовой математике. Для приближения решения данного уравнения используется нейронная сеть, которая принимает на вход параметры x и t и возвращает оценку цены опциона $V(x, t)$. Входными параметрами модели являются логарифм цены базового актива и время до истечения опциона, тогда как выходным параметром модели является оценка цены опциона на основе этих входных данных.

Математически нейронная сеть, используемая для приближения функции $V(x, t)$ представляется следующим образом:

$$U(x, t) = \sum w_j s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j), \tag{16}$$

где $s(x) = e^x / (1 + e^x)$ – функция активации, а w_j , α_j , β_j и γ_j являются параметрами сети, которые подлежат обучению. Для оптимизации параметров сети применяется специальная функция потерь, которая минимизирует невязку. Для опционов европейского стиля цена должна удовлетворять уравнению (8) и соответствующему начальному условию. В этом случае функция потерь будет включать два компонента. Первый компонент $\text{err}(x, t)$ минимизирует результат подстановки $U(x, t)$ в уравнение Блэка-Шоулза.

$$\text{err}(x, t) = \sum \left(-\frac{\partial U}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - rU \right)^2, \tag{17}$$

где значения производных $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ мы можем вычислить в явном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = w_j \beta_j s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j)), \tag{18}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = w_j \alpha_j s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j)), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) &= w_j \alpha_j^2 s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j)) \\ &\quad - 2w_j \alpha_j^2 s^2(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j)). \end{aligned} \tag{20}$$

Определим область локализации для решения уравнения

$$\Omega = \{(x, t) | x_{min} \leq x \leq x_{max}, 0 < t < T\}.$$

Второй компонент функции потерь должен контролировать соответствие начальным условиям. Таким образом, итоговая функция потерь LOSS, вычисленная на основе выборки из n точек в области Ω и выборки из m точек из отрезка $[x_{min}, x_{max}]$, может быть записана следующим образом

$$\text{LOSS} = \frac{1}{n} \sum_{(x_i, t_i) \in \Omega} \text{err}(x, t) + \frac{1}{m} \sum_{(x_i, t_i) \in [x_{min}, x_{max}]} (V(x, 0) - U(x, 0))^2. \tag{21}$$

Процесс обучения модели начинается с генерации данных начальных условий и данных для решения основного уравнения. Эти данные затем используются для обучения нейронной сети. Сама сеть состоит из двух входных нейронов, соответствующих переменным x и t , одного скрытого слоя с нелинейной активацией и одного выходного нейрона, который возвращает оценку функции.

Архитектура сети может быть описана следующими параметрами: количество входных нейронов – 2, количество нейронов в скрытом слое – 10, и количество выходных нейронов – 1.

Для обучения модели используется метод оптимизации, основанный на градиентном спуске, с целью минимизации функции потерь. Обучение проходит в два этапа: на первом этапе модель обучается на данных начальных условий, а на втором – во всей области с помощью функции потерь (21).

После завершения обучения модель способна предсказывать цену опциона $V(x, t)$ на основе входных данных x и t . Для проверки качества предсказаний, модель сравнивается с аналитическим решением уравнения Блэка-Шоулза (5), что позволяет оценить точность численного решения, полученного с помощью нейронной сети.

В следующем разделе мы продемонстрируем результаты практического применения построенных моделей.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Мы провели ряд вычислительных экспериментов, направленных на оценку эффективности и точности предложенных нейросетевых моделей, применяемых для аппроксимации цен опционов в модели Блэка-Шоулза. Мы рассмотрели

- ИНС (14) для аппроксимации функции распределения нормированной нормальной величины $\Phi(x)$;
- ИНС (15) для аппроксимации цены опциона в модели Блэка-Шоулза
- ИНС (16) для аппроксимации решения уравнения Блэка-Шоулза.

Одной из ключевых особенностей первой ИНС является необходимость обеспечения монотонности аппроксимируемой функции, что достигается путем строгого ограничения на положительность весов скрытого и выходного слоя нейронной сети. Результаты обучения указанной ИНС представлены в таблице 1. Как видно из третьего столбца таблицы 1, положительные веса α_j на выходном слое в сумме приближенно дают единицу, что позволяет интерпретировать их как вероятности вхождения в смесь случайных величин $\beta_j Z_j + \theta_j$, где Z_j – логистическая случайная величина с функцией распределения $s(x)$. Таким образом, мы получаем, что указанная смесь, построенная с помощью нашей нейросети, аппроксимирует нормированную нормальную величину X , функцией распределения которой и является $\Phi(x)$:

$$X \approx \begin{cases} \beta_1 Z_1 + \theta_1, & \text{с вероятностью } \alpha_1; \\ \dots & \\ \beta_j Z_j + \theta_j, & \text{с вероятностью } \alpha_j; \\ \dots & \\ \beta_{10} Z_{10} + \theta_{10}, & \text{с вероятностью } \alpha_{10}, \end{cases} \quad (22)$$

Теоретическое обоснование возможности такой аппроксимации можно найти в недавней работе [10].

Результаты численных экспериментов показали, что средняя квадратическая ошибка на тестовой выборке составила 1.11×10^{-8} , что свидетельствует о высокой точности предложенной аппроксимации. Более того построенная нейросеть имеет понятную вероятностную интерпретацию. Тестирование на сетке с шагом 0.001 на отрезке $[0, 3]$ показало, что при достигнутом уровне точности нейросетевая аппроксимация в среднем работает быстрее, чем стандартная функция `norm.cdf()` библиотеки SciPy на языке программирования Python: 0.000036 сек против 0.000070 сек, что подтверждает эффективность нейросети для вычисления $\Phi(x)$.

В ходе дополнительных исследований было установлено, что увеличение нейронов на скрытом слое при сохранении требования положительности весов приводит к более высокой точ-

β_j	θ_j	α_j
2.769603	4.218520	0.088979
3.526779	-1.294590	0.104438
3.362026	1.559401	0.096860
3.717573	3.697874	0.091598
3.957426	-1.881185	0.105242
4.287301	-0.057452	0.101482
3.302728	1.473509	0.097048
3.851278	-3.625712	0.107510
3.115624	1.080214	0.098064
2.745375	-4.008735	0.108418

Таблица 1. Параметры нейронной сети для аппроксимации $\Phi(x)$

ности аппроксимации функции распределения нормированной нормальной величины и соответственно цены опциона. По сути увеличение количества нейронов на скрытом слое означает увеличение количества случайных величин в смеси (22), приближающей нормированное нормальное распределение. Вычислительные эксперименты подтверждают теоретический результат работы [10], что по аналогии с теоремой Цыбенко [1], увеличивая количество нейронов на скрытом слое можно добиться аппроксимации функции распределения непрерывной случайной величины с любой точностью.

Вторая модель ИНС (15) была реализована для аппроксимации классической формулы Блэка-Шоулза, используемой для вычисления цены европейского опциона call для широкого набора параметров (S, σ, r, T, K) . Напомним, что архитектура данной нейросети включает в себя в качестве компоненты нейросеть с архитектурой первой модели. Основная задача заключалась в том, чтобы разработать такую архитектуру нейронной сети, которая в результате обучения приведет к нейросетевому аналогу формулы Блэка-Шоулза.

Модель была обучена с использованием стандартного градиентного спуска. Результаты обучения представлены в таблице 2. После обучения значения весов \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 (см. первые два столбца таблицы 2 оказались близки к значениям параметров, известных из аналитической формулы Блэка-Шоулза: $(1, 1, 0.5)$ и $(1, 1, -0.5)$ (см. (12)), а параметры $\beta_j, \theta_j, \alpha_j$ из последних трех столбцов таблицы 2) по сути являются небольшой модификацией соответствующих параметрам из таблицы 1. Таким образом, на последних двух слоях нейросеть приближенно воспроизвела функцию $\Phi(x)$, предложив похожую, но альтернативную модель для аппроксимации $\Phi(x)$, представленной в таблице 1. В результате, с учетом описанных интерпретаций наша нейросеть в приближенном виде вывела формулу (13).

\mathbf{w}_1	\mathbf{w}_2	β_j	θ_j	α_j
0.973031	0.973034	2.825577	4.137240	0.091491
0.973047	0.973030	3.459079	-1.393134	0.108176
0.486522	-0.486503	3.414200	1.445429	0.099105
		3.781929	3.580137	0.093903
		3.892434	-1.976571	0.109581
		4.237875	-0.184259	0.105402
		3.344878	1.358140	0.099319
		3.757988	-3.703281	0.102940
		3.053756	0.964596	0.100451
		2.761203	-4.062475	0.089908

Таблица 2. Параметры нейронной сети для аппроксимации формулы Блэка-Шоулза

Третья рассмотренная модель представляет собой численное решение уравнения Блэка-Шоулза (8) с использованием нейронной сети. В отличие от предыдущей модели, в данном случае нейросеть обучается, минимизируя невязку (см. (17),(21)), улучшая приближенное решение (16) на каждом шаге при фиксированных параметрах волатильности $\sigma = 0.2$ и безрисковой процентной ставки $r = 0.05$.

Обучение данной модели проводилось на 20000 примерах, с последующей оценкой на тестовой выборке из 2000 примеров. Результаты экспериментов показали, что средняя квадратичная ошибка (21) составила 7.08×10^{-5} после 10000 эпох обучения. Главное преимущество данного подхода заключается в том, что функция потерь уже вычислена аналитически (см. (18)-(20)) и ее не нужно численно пересчитывать на каждой итерации, например, с помощью конечных разностей.

На рисунке 2 показано сравнение численного решения уравнения Блэка-Шоулза $U(x, t)$, аппроксимированного с использованием нейронной сети (16), и аналитического решения $U_{BS}(x, t)$, полученного с использованием классической модели Блэка-Шоулза, для различных временных точек t . На каждом графике отображена зависимость цены опциона от логарифма цены базового актива $x = \log(S/K)$.

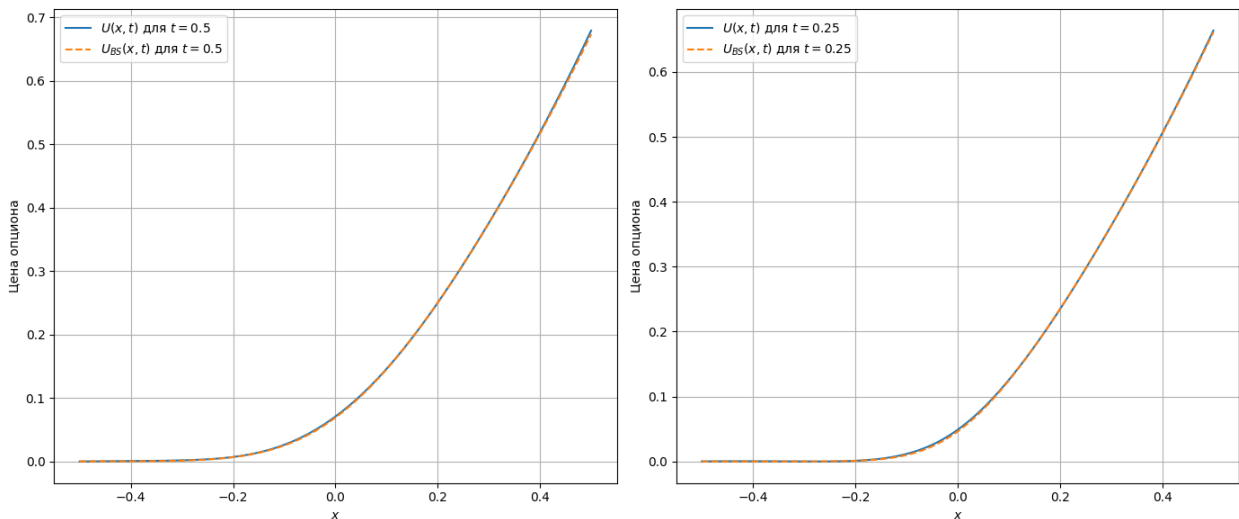


Рис. 2. Сравнение численного и аналитического решений уравнения Блэка-Шоулза

На левой панели рис. 2 демонстрируются результаты при $t = 0.5$, то есть для времени до истечения опциона, равного половине года. Видно, что аппроксимированное решение $U(x, t)$ (сплошная линия) практически совпадает с аналитическим решением $U_{BS}(x, t)$ (пунктирная линия), что указывает на высокую точность модели.

Правая панель рис. 2 демонстрирует сравнение для $t = 0.25$, что представляет более короткий временной интервал до истечения опциона (3 месяца). Как и на первом графике, аппроксимированное и аналитическое решения почти полностью совпадают по всей области значений x , что на практике подтверждает точность предложенной нейросетевой модели на разных временных промежутках.

На графике 3 показаны абсолютные ошибки аппроксимации численного решения уравнения Блэка-Шоулза относительно аналитического решения для двух различных сроков действия опциона: $t = 0.5$ и $t = 0.25$. Ошибки представлены в зависимости от значения логарифма отношения цены базового актива к цене исполнения $x = \log(S/K)$.

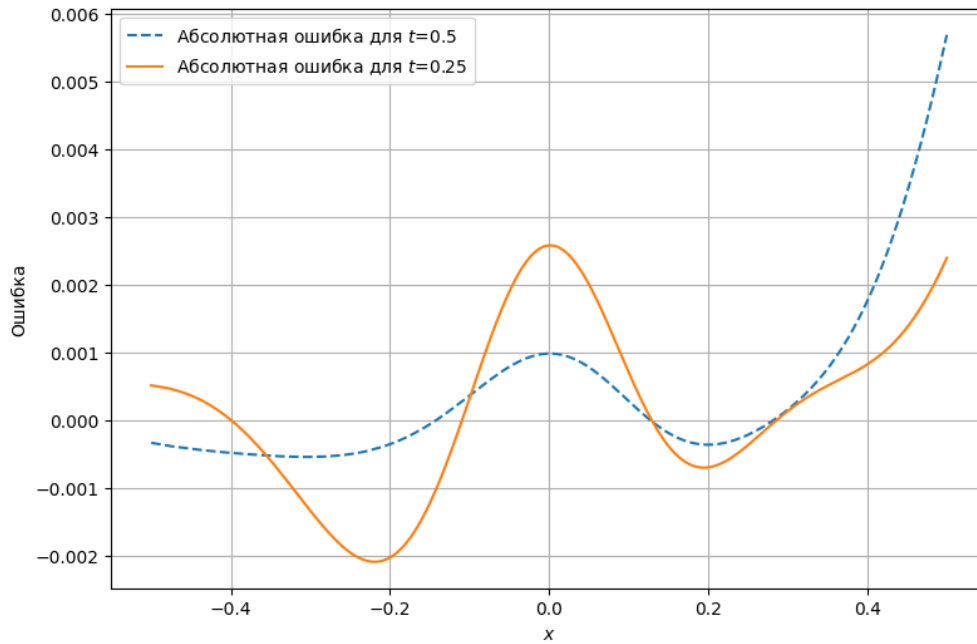


Рис. 3. Абсолютная ошибка решений уравнения Блэка-Шоулза

Далее, мы проверим точность реализованных нами трех моделей нейросетей на основе интервальных статистических оценок. Для этого на достаточно большой тестовой выборке входных данных мы вычислим относительную частоту события, заключающегося в том, что значения, предсказанные ИНС отклоняются от аналитических менее чем на величину ϵ . На основе полученной частоты можно построить доверительный интервал для вероятности этого события [12].

Например, статистическая оценка вероятности отклонения предсказанных значений $F(z)$ (см. (14)) первой модели от значений $\Phi(z)$ менее чем на $\epsilon = 0.000564$ на промежутке $[-3, 3]$ оказалась выше 0.9993 с надежностью 99,9%.

Для оценки качества работы второй модели мы сравнили предсказанные значения с теоретической ценой опциона, вычисленной по модели Блэка-Шоулза и вычислили относительную частоту отклонения на величину меньшую $\epsilon = 0.001$. Расчеты демонстрирует высокую точность аппроксимации цен опционов с использованием нашей ИНС. В частности, с помощью доверительного интервала для оценки вероятности по относительной частоте, на основе тестовой выборки объема $N = 2000$, с надежностью 99,9% мы установили, что при $K = 1$ и

$$(S, \sigma, r, T) \in [0.5, 2] \times [0.1, 1.0] \times [0.0, 0.1] \times [0.1, 1.0]$$

оценка $|SG_1(\mathbf{x}) - Ke^{-rT}G_2(\mathbf{x}) - V_{call}(S, K, T, \sigma, r)| < 0.000288$ выполняется с вероятностью не менее 0.9956.

Аналогичным образом мы оценили с надежностью 99,9%, что при $K = 1$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$ и

$$(S, T) \in [0.5, 2] \times [0.1, 1.0]$$

оценка $|U(\ln S/K, T) - V_{call}(S, K, T, \sigma, r)| < 0.001$ выполняется с вероятностью не менее 0.995.

Итоговые статистические оценки точности для наших трех реализаций ИНС представлены в таблице 3.

Проведенные вычислительные эксперименты показали на примере модели Блэка-Шоулза, что предложенные подходы к построению интерпретируемых нейросетевых моделей обладают

Модель	Средняя квадратичная ошибка	Точность ϵ	Надежность	Нижняя граница вероятности
Аппроксимация $\Phi(x)$	1.06×10^{-8}	0.000564	99.9%	0.9993
Модель Блэка-Шоулза	7.53×10^{-5}	0.000288	99.9%	0.9956
Уравнение Блэка-Шоулза	7.08×10^{-5}	0.001	99.9%	0.995

Таблица 3. Итоговые результаты обучения

высокой точностью и способны эффективно решать задачи, связанные с аппроксимацией цен опционов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были исследованы и разработаны несколько подходов к моделированию цен финансовых инструментов, в частности, к оцениванию опционов и решению уравнения Блэка-Шоулза, с использованием искусственных нейронных сетей. Использование нейронных сетей в финансовой математике открывает новые горизонты для создания более гибких и адаптивных вычислительных моделей. В нашей работе основное внимание уделяется интерпретации весов нейросети для оценки стоимости опционов.

Наше исследование позволяет взглянуть по-новому на применение нейросетей в задачах вычислительной финансовой математики. В стандартной постановке нейронная сеть получает информацию о текущей цене акции, цене исполнения опциона, безрисковой процентной ставке, волатильности акции и сроке действия опциона. Исследователь методом проб и ошибок подбирает количество скрытых слоев, число нейронов на них и функции активации. В результате обучения на аналитических формулах или реальных данных получается плохо интерпретируемая модель, применение которой на других данных слабо обосновано. В нашем подходе мы учитываем вероятностную природу выбранных нами функций активации и выстраиваем архитектуру нейросети так, чтобы построенная модель была легко интерпретируемой и соответствовала особенностям функции цены опциона как линейной комбинации двух функций распределения. В частности, веса \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 на первом слое можно интерпретировать, как коэффициенты линейных преобразований входных параметров, которые формируют аргументы для функций распределений в формуле цены опциона (13). Веса следующего слоя нейросети из 10 нейронов интерпретируются как вероятностные характеристики смеси линейных преобразований логистических случайных величин (22), аппроксимирующей нормированное нормальное распределение. Таким образом, в ходе обучения более сложной модели для цены опциона, мы одновременно получили и модель для приближения функции нормального распределения.

Напомним, что в нашей модели использовалось ограничение на положительность весов в нейросети, что накладывало определенные требования на процесс обучения. Это ограничение было реализовано с помощью модификации шага обновления весов: после каждой итерации градиентного спуска веса обновлялись стандартным способом, но затем отрицательные значения обнулялись, либо веса проецировались в область положительных значений с использованием функции $\text{ReLU}(w) = \max(w, 0)$. Введение такого ограничения было направлено на обеспечение интерпретируемости модели, так как нейросеть с положительными весами представляет собой монотонно возрастающую функцию, что соответствует поведению моделируемой функции распределения. Ограничение на положительность замедляло процесс сходимости модели по сравнению с моделью без ограничений, так как оптимальные значения весов могли оказаться вне области определения. Дополнительно, в ходе экспериментов было проведено обучение модели без ограничений на веса, которое показало более быструю сходимость и чуть более высокую точность аппроксимации. Однако полученный результат не обеспечивал адек-

ватности модели (в части монотонности) и интерпретируемости параметров нейросети, хотя и показывает более высокую точность.

Наш подход, примененный к модели Блэка-Шоулза может быть распространен и на другие модели финансовых рынков (например, моделей Леви или моделей со стохастической волатильностью), поскольку общий вид формулы (3) не изменится и ключевым компонентом нейросети будет аппроксимация соответствующих функций распределений. При первом подходе поменяются только входные параметры, характеризующие случайный процесс, моделирующий доходность базового актива. Наш пример ИНС (15) показывает, что правильный выбор входных параметров обеспечивает наилучший результат. Это лишний раз подчеркивает, что аналитик данных не должен бездумно применять методы машинного обучения, а в первую очередь осмысливать, какими должны быть входные параметры в части устойчивости и информативности.

Было проведено сравнение скорости вычислений между аппроксимацией функции распределения с помощью нейронной сети и её аналитическим вычислением. Результаты показали, что аппроксимация функции распределения нейросетью в среднем почти вдвое превосходит аналитический метод по скорости, что делает её пригодной для применения в задачах, требующих быстрого расчёта, таких как торговля большими портфелями опционов на разные финансовые активы в реальном времени или высокочастотный трейдинг. При необходимости проведения вычислений с более высокой точностью или при аппроксимации более сложных финансовых моделей преимущество в скорости может быть уже не таким значимым. В этом случае, увеличить скорость помогут параллельные вычисления на программном обеспечении CUDA, которое позволяет одновременно выполнять операции на тысячах ядер графических процессоров, что особенно эффективно для больших моделей и объёмов данных. Используемая нами библиотека PyTorch поддерживает CUDA, позволяя легко переносить вычисления на графические процессоры для значительного ускорения, особенно в задачах глубокого обучения. Однако в нашем случае CUDA не использовалось, так как объём вычислений был относительно небольшой.

Второй подход, связанный с численным решением уравнения Блэка-Шоулза также применим для более широкого класса моделей. В случае моделей Леви мы будем иметь обобщенное уравнение Блэка-Шоулза (обратное уравнение Колмогорова). Математическое обоснование аппроксимационных свойств нейросетей позволяет искать решение в специальном виде (16), который удобен для подсчета функции потерь и градиента в явном виде.

Помимо этого, важно отметить, что предложенные модели обладают высоким потенциалом для дальнейшей адаптации и улучшения. Например, возможно применение более сложных архитектур нейронных сетей или использование гибридных моделей, объединяющих нейронные сети с традиционными методами вычислительной математики. В будущем, такие подходы могут привести к созданию более точных и эффективных инструментов для оценки финансовых рисков и оптимизации инвестиционных портфелей.

Предварительные результаты исследования представлялись на Девятой международной конференции по стохастическим методам (г. Геленджик, пос. Дивноморское, Россия, 2–8 июня 2024 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, 1989, vol. 2, no. 4, pp. 303–314.
2. Hornik K., Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural networks*, 1989, vol. 2, no. 5, pp. 359–366.

3. Kudryavtsev O., Grechko A., Mamedov I. Monte Carlo method for pricing lookback options in Lévy models. *Theory Probab. Appl.*, 2024, vol. 69, no. 2, pp. 243–264.
4. Séverin E. *Neural Networks and their application in the fields of corporate finance*. Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2008, pp. 1–15.
5. Antonov A., Piterbarg V. Alternatives to Deep Neural Networks for Function Approximations in Finance. *SSRN Electronic Journal*, 2021, URL: <https://ssrn.com/abstract=3958331>.
6. Glau K., Wunderlich L. Neural network expression rates and applications of the deep parametric PDE method in counterparty credit risk. *Annals of Operations Research*, 2023, vol. 336, pp. 1–27.
7. Preeti, Bala R., Singh R. P. Financial and Non-Stationary Time Series Forecasting using LSTM Recurrent Neural Network for Short and Long Horizon. 2019 10th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT), 2019, pp. 1–7.
8. Bossu S., Crépey S., Nguyen H.-D. Spanning Multi-Asset Payoffs With ReLUs. 2024, pp. 1–43.
9. Bao Z. Research on the Influence of Financial Mathematics on Modern Financial Market. *Highlights in Business, Economics and Management*, 2023, vol. 15, pp. 260–266.
10. Kudryavtsev O., Danilova N. Applications of artificial neural networks to simulating Lévy processes. *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 271, pp. 421–433.
11. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, vol. 81, no. 3, pp. 637–654.
12. Wilson E. B. Probable inference, the law of succession, and statistical inference. *Journal of the American Statistical Association*, 1927, vol. 158, no. 22, pp. 209–212.

On improving the interpretability of artificial neural networks using the example of the pricing options problems

Kudryavtsev O.E., Postolova D.V.

In this paper, we demonstrate how to improve the interpretability of neural networks using standard problems of computational finance as an example. In our first approach, we justify that a feedforward neural network with one hidden layer and positive weights is a natural approximator for general cumulative distribution functions of continuous random variables. Using this kind of interpretation, we design a neural network architecture that, as a result of training, leads to a neural network analogue of the classical Black-Scholes formula. The main advantage of our second approach for the numerical solution of the Black-Scholes equation is that, based on theoretically justified formulas for the approximating neural network, we can analytically calculate the loss function at each training iteration.

KEYWORDS: artificial neural networks, computational finance, Black-Scholes model.