

Автоматическое ортотропное выравнивание трёхмерных изображений на основе преобразования Хафа

Кулагин П. А.^{**,****}, Казимиров Д. Д.^{*,**}, Бугай О. А.^{*,**},
Киркича А. А.^{*,**},****, Николаев Д. П.^{*,**}, Гильманов М. И.^{*,**}

** ООО «Смарт Энджинс Сервис», г. Москва, Россия*

*** Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва, Россия*

**** Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»*

Российской академии наук, г. Москва, Россия

***** Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Россия*

Поступила в редколлегию 01.10.2025 г. Принята 10.10.2025 г.

Аннотация—Задача ортотропного выравнивания объемных изображений имеет особое значение для индустриальной компьютерной томографии и позволяет эффективно решать широкий круг практических задач, включая совмещение с САД-моделями и точное измерение размеров дефектов. В данной статье мы формализуем задачу определения выделенных направлений и ортотропной ориентации, а также предлагаем автоматический метод выравнивания трехмерных изображений на основе вычисления быстрого трёхмерного преобразования Хафа. Представлены результаты оценки и сопоставления качества работы алгоритма с известными методами. Показано, что предложенный метод достигает превосходства над базовыми подходами не только с точки зрения точности и устойчивости, но и с точки зрения универсальности. Дополнительно обсуждаются перспективные направления использования разработанного подхода в смежных областях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: компьютерная томография (КТ); стандартизация ориентации объёма, преобразование Хафа (ПХ), быстрое преобразование Хафа (БПХ).

DOI: 10.53921/18195822_2025_25_3_297

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует множество методов неразрушающей реконструкции трехмерных объемов, среди которых наиболее распространены компьютерная [1] и магнитно-резонансная [2] томографии. В промышленности восстановление внутренней структуры объема редко является завершающим этапом анализа, при этом для решения разных задач могут применяться различные инструменты и методы постобработки. Одним из наиболее распространённых этапов такой постобработки является стандартизация ориентации, или ортотропное выравнивание, заключающаяся в приведении ориентации объёма в соответствие с его выраженными ортотропными свойствами или структурными особенностями (см. рис. 1).

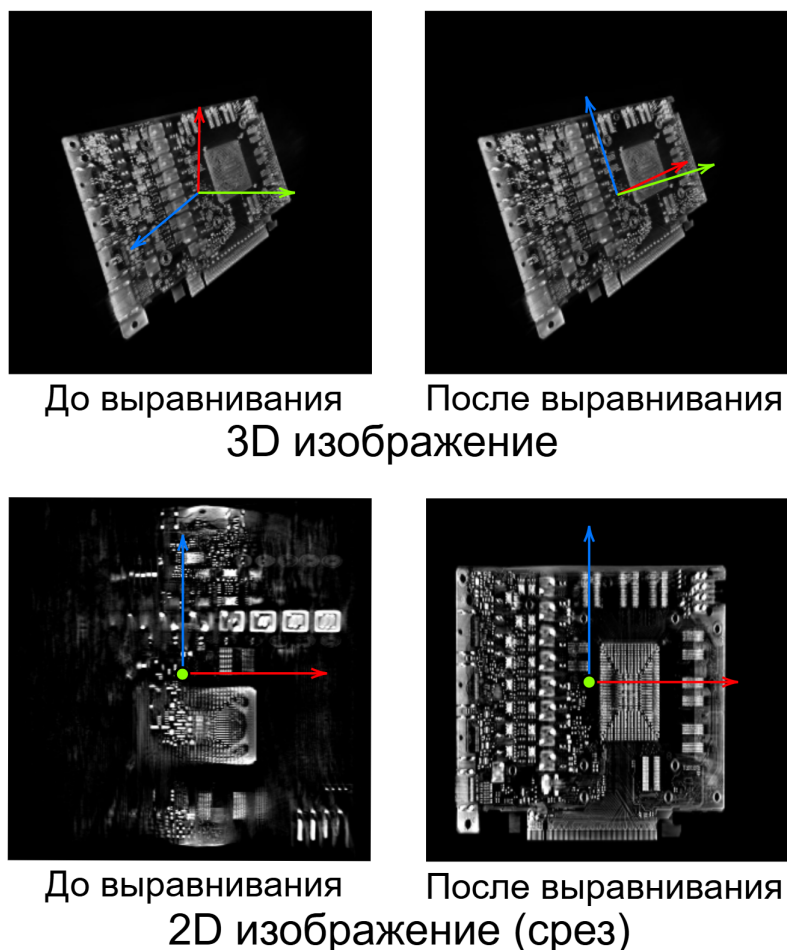


Рис. 1. Сравнение объёма печатной платы (ПП) до (слева) и после (справа) ортотропного выравнивания. Верхний ряд иллюстрирует визуализации объёмного изображения вместе с базисными векторами системы координат, в которой представлен объект, – до и после выравнивания. В нижнем ряду показаны репрезентативные 2D-срезы соответствующего объёма. 2D-срезы соответствуют сечениям 3D-изображения вдоль плоскости, определяемой синим и красным векторами, показанными на изображениях верхнего ряда. Третий, зелёный базисный вектор на изображениях нижнего ряда, направлен к наблюдателю. Можно заметить, что после выравнивания срезы становятся существенно более информативными и наглядными: отдельные элементы ПП, такие как микросхемы и токопроводящие дорожки, визуализируются отчётливо и легко интерпретируются.

Стандартизация ориентации может иметь самостоятельное значение – например, при исследовании многослойных печатных плат, для которых критически важна высокая точность ориентации слоёв [3, 4, 5]. Современные применения этого подхода включают задачи, в которых выравнивание необходимо для размещения полного контура дорожек печатной платы в одном 2D-срезе, что обеспечивает удобство визуализации и возможность автоматического контроля дефектов (рис. 1). Приведение ориентации объектов к эталонной существенно упрощает решение задач сегментации, выделения ключевых точек, совмещение и сшивку 3D изображений. Для методов, основанных на глубоком обучении, ортотропное выравнивание позволяет значительно снизить вариативность данных, что ведёт к повышению точности при меньших вычислительных затратах и сокращении объёмов подготовки данных. Другая важная область применения – сопоставление ориентированного объёма с полигональными или САД моделями объекта для упрощения преобразования модели в объёмное изображение [6, 7].

Хотя выравнивание 3D изображений может выполняться вручную с помощью интерактивных инструментов визуализации в простых случаях, такой подход неэффективно масштабируется для задач, требующих полностью автоматического контроля производства. В связи с этим существует острая необходимость в автоматических, устойчивых, робастных и воспроизводимых методах ортотропного выравнивания. Несмотря на широкое распространение классических тензорных методов, основанных на тензоре инерции и структурном тензоре, их применение ограничено из-за низкой устойчивости к шумам и высокой чувствительности к артефактам томографической реконструкции. Эти артефакты часто возникают независимо от ортотропных особенностей объекта и могут сильно снизить точность автоматического выравнивания. Другой известный подход основан на методе RANSAC (Random Sample Consensus) [8]. Вопреки результативности в определенных частных случаях, этот подход имеет ограниченную область применения, поскольку его эффективность зависит от наличия специфических ортотропных признаков в структуре исследуемого объекта.

С другой стороны, для задачи нахождения ориентации двумерного изображения современный подход широко известен и является общепризнанным: он основан на преобразовании Хафа (ПХ) для одновременного подсчета сумм значений пикселей по всевозможным прямым изображения [9]. Этот метод обеспечивает робастную и стабильную стандартизацию ориентации при анализе документов и использует быстрый метод расчета ПХ (БПХ) для повышения вычислительной эффективности.

В данной статье мы ставим цель обобщить 2D подход к стандартизации ориентации изображения на случай 3D изображений. При этом на пути обобщения возникает ряд концептуальных отличий, требующих специального рассмотрения. В частности, глубокого анализа требует аппарат 3D быстрого ПХ, позволяющий вычислять суммы вдоль параллельных плоскостей, вместо прямых. Наивная реализация алгоритма суммирования по плоскостям имеет вычислительную сложность $\Theta(N^5)$. Однако вычисления могут быть существенно оптимизированы: использование 3D-БПХ позволяет выполнять суммирование вдоль каждой дискретной плоскости объема с вычислительной сложностью всего $O(N^3 \log N)$. По существу, 3D-БПХ представляет собой композицию двух последовательных 2D-БПХ, применяемых к сечениям типов xy и xz [10].

Дополнительно мы рассматриваем возможность применения предложенного метода для задачи стандартизации ориентации индивидуальных особых точек трехмерного изображения.

Структура статьи организована следующим образом. В разделе 2 приведена постановка задачи ортотропного выравнивания и приведен обзор основных автоматических методов. В разделе 3 представлено обобщение метода стандартизации ориентации, основанного на 2D-ПХ на 3D случай. В разделе 4 представлена оценка и сравнение предложенного и известных алгоритмов. Раздел 5 завершает статью.

2. СТАНДАРТИЗАЦИЯ ОРИЕНТАЦИИ И ОРТОТРОПНОЕ ВЫРАВНИВАНИЕ

Рассматриваемая общая задача - стандартизация ориентации объемных изображений. Под стандартизацией ориентации мы понимаем процедуру определения канонической ориентации трёхмерного изображения (воксельного объема) таким образом, чтобы разные представления структурно сходных объектов были приведены к согласованной системе координат. Решение этой задачи имеет ключевое значение для сравнительного анализа объёмных данных, статистических исследований и автоматизированных пайплайнов обработки, где согласованная ориентация упрощает как математическую обработку, так и интерпретацию результатов.

Частным случаем задачи стандартизации ориентации является ортотропное выравнивание, то есть определение ориентации объема в соответствии с его выраженными ортотропными свойствами или особенностями. Классическая постановка задачи сводится к нахождению един-

ственного ортонормированного базиса, характеризующего объект или его трехмерную модель. В вырожденных случаях, например для радиально-симметричных структур, задача упрощается до определения единственного выделенного направления. Для более сложных объектов единственного базиса, согласованного со всеми ортогональными особенностями, может не существовать. Тем не менее стандартизация ориентации остается возможной в том смысле, что похожим объектам сопоставляются близкие ориентации, даже если эти ориентации напрямую не привязаны к ортотропной структуре. Примером такого типа объектов является свитки, о которых подробнее будет сказано в разделе, посвящённом экспериментам.

В этой статье мы в первую очередь сосредоточимся на первых 2 случаях – ортотропном выравнивании и его вырожденных случаях – и лишь кратко рассмотрим более общую ситуацию в разделе “Обсуждение результатов”. Для решения задач, связанных с определением внутренней ориентации объектов (или изображений) в пространстве, а также анализа относительного положения и взаимной ориентации множества объектов (изображений), применяются различные оценочные функции и тензорные характеристики. В частности, важным аппаратом для идентификации выделенных направлений объема является функция анизотропии, о которой подробно будет рассказано ниже, также в её терминах будут сформулированы определения анизотропных направлений (особых направлений) изображения.

2.1. Математическая постановка задачи

Считаем, что задана гладкая функция с компактным носителем $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная в декартовой системе координат $\mathbb{R}^3$. Для любого направления $\vec{l} \in S^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\|^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, мы определим функцию $\rho_{\vec{l}} = \rho_{\vec{l}}(r) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, значения которой получены путем интегрирования f вдоль плоскостей, ортогональных вектору $\vec{l}$, заданных уравнениями вида $(\vec{l}, \vec{x}) = r$, $r \in \mathbb{R}$:

$$\rho_{\vec{l}}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{(\vec{l}, \vec{x})=r} f(\vec{x}) d\sigma, \quad (1)$$

где $d\sigma$ обозначает форму площади (меру Лебега) на плоскостях интегрирования, и $(\cdot, \cdot)$ обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $\|\vec{x}\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{x}, \vec{x})$. Функцию $\rho_{\vec{l}}$ будем называть проекцией f вдоль плоскостей, перпендикулярных направлению $\vec{l}$. Интеграл $\int_{\mathbb{R}} \rho_{\vec{l}}(r) dr$ проекции в точности равен $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}) dV$ (dV - форма объема), независимо от направления $\vec{l} \in S^2$, и нередко упоминается в литературе по компьютерной томографии как радоновский инвариант.

Будем называть $A : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ функцией (угловой) анизотропии. Направление $\vec{l} \in S^2$ будем называть направлением анизотропии или особым/выделенным направлением функции f , если $\vec{l}$ - строгий локальный максимум функции анизотропии A на сфере S^2 :

$$\vec{l} \in \text{strict loc argmax}_{\vec{l} \in S^2} A. \quad (2)$$

Заметим, что функция A четная: $A(\vec{l}) = A(-\vec{l})$. Поэтому, если $\vec{l}$ строгий локальный максимум, то $-\vec{l}$ тоже строгий локальный максимум. В дальнейшем мы будем отождествлять антиподальные направления $\vec{l}$ и $-\vec{l}$; отождествленные антиподальные направления анизотропии будем называть осью анизотропии функции f . Из определения следует, что понятия направлений и осей анизотропии функции не зависят от выбора системы координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Примером функции анизотропии является дисперсия проекций $\rho_{\vec{l}}$:

$$A(\vec{l}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var } \rho_{\vec{l}}. \quad (3)$$

где $\text{Var } g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)^2 dt - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right)^2$, при условии, что функция g имеет носитель в интервале (a, b) , $g(a) = g(b) = 0$.

Трёхмерное изображение (воксельный объем, объемное изображение) со сторонами

$$\vec{n} \stackrel{\text{def}}{=} (n_1, n_2, n_3)$$

определено как отображение $I_{\vec{n}}^3 : \mathbb{Z}_{\vec{n}}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, где область определения

$$\mathbb{Z}_{\vec{n}}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^3 \{0, 1, \dots, n_i - 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

называется растром. Кортеж $\langle \vec{z}, a \rangle$, где $\vec{z} \in \mathbb{Z}_{\vec{n}}^3$, $I_{\vec{n}}^3(\vec{z}) \stackrel{\text{def}}{=} a \in \mathbb{R}$, будем называть пикселем (вокселем), где $\vec{z}$ является позицией, элементы $\vec{z}$ – координаты пикселя (вокселя), a – значение пикселя (вокселя).

Аналогично двумерное изображение определим как отображение вида $I_{(n_1, n_2)}^2 : \mathbb{Z}_{(n_1, n_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_{(n_1, n_2)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} = \prod_{i=1}^2 \{0, 1, \dots, n_i - 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Определения раstra, пикселя, его координат и значения напрямую соответствуют введённым понятиям для трёхмерного случая, с учётом уменьшения размерности с трёх до двух. Двумерное изображение также можно рассматривать как специальный случай 3D изображения с высотой $n_3 = 1$. Поскольку в данной работе основное внимание уделяется трёхмерным изображениям, отдельные обозначения для двумерных изображений вводиться не будут.

Рассмотрим трёхмерное изображение I_f , для которого значение вокселя с координатами $\vec{z} \in \mathbb{Z}^3$ есть $f(\vec{z})$, где f – функция с компактным носителем, описывающая пространственное распределение физико-химических свойств материального объекта. Для изображения I_f дискретный аналог функции $\rho_{\vec{l}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определим как

$$\rho_{\vec{l}}^{(d)}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\vec{x} \in \Pi_{\vec{l}, r}} w(\vec{x}) I_f(\vec{x}), \quad (4)$$

где $\Pi_{\vec{l}, r} \subset \mathbb{Z}^3$ обозначает дискретизацию плоскости $(\vec{l}, \vec{x}) = r$, и w – весовая функция, зависящая от метода интерполяции. При соответствующем выборе дискретизации $\Pi_{\vec{l}, r}$ непрерывных плоскостей в пространстве и весовой функции w сохраняется дискретный инвариант Радона: интегралы от дискретных проекций $\rho_{\vec{l}}^{(d)}$ не зависят от выбора направления $\vec{l}$.

В дискретном случае функция анизотропии $A^{(d)} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ принимает вид:

$$A^{(d)}(\vec{l}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var } \rho_{\vec{l}}^{(d)}. \quad (5)$$

Назовем вектор $\vec{l}$ анизотропным или особым/выделенным направлением изображения I_f , если оно является строгим локальным максимумом функции $A^{(d)}$:

$$\vec{l} \in \text{strict loc argmax}_{\vec{l} \in S^2} A^{(d)}. \quad (6)$$

Аналогично непрерывному случаю, как результат отождествления противоположных (антиподальных) направлений анизотропии определяется ось анизотропии, или особая/выделенная ось, изображения I_f .

В общем случае изображение может характеризоваться несколькими осями анизотропии. Если изображение имеет 3 взаимно ортогональные оси анизотропии, то соответствующее изображение будем называть ортотропным. Исследование ортотропных изображений особенно

удобно в системе координат, образованной анизотропными осями, поскольку это существенно упрощает описание структурных свойств и математическую обработку данных. Изображение называется ортотропно выровненным, если тройка анизотропных осей $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3\}$ совпадает с осями естественной координатной системы изображения $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то есть матрица, состоящая из координат выделенных направлений (возможно, после соответствующего переупорядочивания), совпадает с единичной матрицей.

Изображение без осей анизотропии естественно называется изотропным. Изотропные изображения противопоставляются анизотропным, которые имеют хотя бы 1 ось анизотропии. Ортотропные изображения образуют особый подкласс анизотропных изображений. Если число анизотропных осей изображения меньше трёх (например, в случае осесимметричного объекта), для его анализа выбирается один из базисов, часть векторов которого совпадает с направлениями анизотропии. В случае, если анизотропное изображение допускает несколько возможных взаимно ортогональных троек анизотропных осей, система координат может быть определена при помощи тройки наиболее выраженных осей анизотропии.

Алгоритм, предложенный в данной статье, решает задачу определения осей анизотропии изображения, что, в свою очередь, позволяет стандартизировать его систему координат и тем самым упростить последующий анализ.

2.2. Автоматические методы ортотропного выравнивания

Алгоритмы ортотропного выравнивания трехмерных изображений составляют класс алгоритмов, которые принимают на вход воксельный объем (3D изображение) и находят 3 взаимно ортогональных вектора, связанных с собственными ортотропными свойствами объекта. Эти алгоритмы также возвращают соответствующее преобразование вращения, которое при применении к координатам вокселей выравнивает исходное изображение и ориентирует его ортотропные элементы вдоль естественных осей изображения, то есть осей системы координат изображения (размерностей длины, ширины, высоты).

Классические методы стандартизации ориентации объёмных изображений, как правило, основаны на вычислении тензора инерции (ТИ) или структурного тензора (СТ), собственные векторы которых используются для определения ориентации изображения. В некоторых случаях, например, когда оси анизотропии совпадают с осями симметрии, базис, получаемый с помощью этих тензорных алгоритмов, согласуется с ортотропными характеристиками в смысле, определённом в разделе 2.1. Это часто приводит к распространённому заблуждению о том, что стандартизация ориентации и ортотропное выравнивание эквивалентны. Хотя тензорные алгоритмы явно не предназначены для ортотропного выравнивания, они по-прежнему широко используются благодаря своей простоте и вычислительной эффективности и лишь иногда дают правильные результаты. По этой причине важно включать их в сравнительные оценки.

В этом разделе мы кратко рассмотрим известные методы стандартизации ориентации и ортотропного выравнивания, так как далее они будут сравнены как между собой, так и с предлагаемым нами подходом. Особое внимание будет уделено методу стандартизации ориентации на основе БПХ [9], изначально предложенному для работы с 2D-изображениями документов, поскольку этот конкретный метод обобщается на случай ортотропного выравнивания 3D-изображений.

Тензорные методы

Общий принцип тензорных методов заключается в вычислении интегрированного статистического дескриптора для всего объёмного изображения V , представленного в виде матрицы 3×3 . Собственные векторы этой матрицы задают целевой базис для стандартизации ориента-

ции, а соответствующее вращение R , которое переводит исходную систему координат в систему с осями, выровненными по направлениям анизотропии, может быть легко рассчитано.

Наиболее популярным и хорошо известным подходом из этой группы является метод, основанный на тензоре инерции (ТИ). Этот метод широко используется в различных задачах: от задачи преобразования 3D-изображения в модель [11, 12] до ориентации волокон в полимерах, армированных стекловолокном, для задач прогнозирования деградиационных процессов и их динамики. [13].

Для случая трехмерного изображения тензор инерции может быть представлен в виде матрицы $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a})(\|\vec{a}\|^2 - a^1 a^1) & - \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a}) a^1 a^2 & - \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a}) a^1 a^3 \\ - \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a}) a^2 a^1 & \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a})(\|\vec{a}\|^2 - a^2 a^2) & - \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a}) a^2 a^3 \\ - \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a}) a^3 a^1 & - \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a}) a^3 a^2 & \sum_{\vec{a} \in A} V(\vec{a})(\|\vec{a}\|^2 - a^3 a^3) \end{pmatrix},$$

где $A \subseteq \mathbb{Z}_{\vec{n}}^3$ - это подмножество раstra изображения V размером $\vec{n}$; $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$ и $\|\vec{a}\|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$ - евклидова норма.

Другое важное изменение основано на вычислении структурного тензора (СТ) $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^1}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^1}(\vec{a}) & \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^1}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^2}(\vec{a}) & \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^1}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^3}(\vec{a}) \\ \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^2}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^1}(\vec{a}) & \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^2}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^2}(\vec{a}) & \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^2}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^3}(\vec{a}) \\ \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^3}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^1}(\vec{a}) & \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^3}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^2}(\vec{a}) & \sum_{\vec{a} \in A} \frac{\partial V}{\partial a^3}(\vec{a}) \frac{\partial V}{\partial a^3}(\vec{a}) \end{pmatrix},$$

где $\frac{\partial V}{\partial a^i}$, обозначает i -ю частную производную изображения V .

Подобно ТИ, процедура диагонализации СТ дает собственные векторы целевого (ортотропного) базиса. В отличие от метода ТИ, метод СТ чувствителен к краям и текстурам, а не только к формам изучаемых объектов [8].

Эти методы просты в реализации и могут быть вычислены достаточно быстро и эффективно. Более того, несмотря на простоту, эти методы часто служат хорошим первоначальным приближением или даже дают решение, близкое к точному, при работе с идеализированными данными. Вместе с тем данные методы характеризуются не только низкой надёжностью, но и значительными ограничениями, проявляющимися, в частности, в нечувствительности к объектам и включениям небольшого размера, что ведёт к снижению точности. Кроме того, этот класс алгоритмов рассчитан на получение единственного решения и эффективно применяется лишь в случае существования строго единственного базиса, описывающего все характеристики объекта.

Совмещение облаков точек и RANSAC оптимизация для выравнивания трехмерных изображений

Другим важным подходом к стандартизации ориентации и ортотропному выравниванию объемных изображений является метод, основанный на применении модели RANSAC к облаку точек градиента изображения. [14]. Основная идея метода заключается в предположении, что локальные направления градиента образуют определённую структуру, связанную с формой объекта. Далее одна из заранее заданных фигур робастно регистрируется в облаке точек, сформированном из векторов локального градиента. Такая регистрация обеспечивает как целевое преобразование, так и ориентацию в ортотропных направлениях, согласованных с исходной формой объекта.

Следует отметить, что описанный метод, основанный на RANSAC, был разработан, с одной стороны, для выхода за рамки анализа интегральных характеристик, менее чувствительных к локальным особенностям, а с другой — для повышения надёжности при решении задачи стандартизации ориентации, чего зачастую недостает интегральным тензорным подходам. Несмотря на то, что подход, основанный на RANSAC, обеспечивает робастное (устойчивое к шуму и выбросам) решение, он имеет множество недостатков. Одной из главных проблем метода является его неспособность к обобщению, поскольку каждый новый объект должен быть отнесен к одной из predetermined форм (структурных моделей), а для сложных или составных объектов может потребоваться уникальная, тщательно разработанная модель. Кроме того, реализация метода на основе RANSAC [14] включает ряд настраиваемых параметров, существенно влияющих на точность получаемых результатов. Это значительно снижает универсальность подхода, поскольку для каждого нового объекта зачастую требуется тщательная перенастройка параметров. Подводя итог, можно сказать, что основным преимуществом методов на основе RANSAC является их робастность, хотя они обладают ограниченной точностью и универсальностью, что снижает их практическую ценность.

Алгоритм выравнивания двумерных изображений, основанный на преобразовании Хафа

Описанные выше методы завершают обзор разработанных в настоящее время подходов к ортотропному выравниванию 3D-изображений. Однако существует большое количество хорошо зарекомендовавших себя современных методов стандартизации ориентации в 2D [9, 15, 16, 17], которые потенциально могут быть обобщены на 3D случай, сохраняя при этом их ключевые свойства и точность. В этом подразделе мы обсудим основанный на ПХ метод стандартизации ориентации цифровых изображений документов [9]. Поскольку в настоящей статье этот подход обобщен, мы описываем все этапы алгоритма, уделяя особое внимание критическим шагам и деталям, чтобы облегчить последующее представление алгоритма для случая 3D-изображений.

2D ПХ вычисляет проекции изображения в разных направлениях, т.е. дискретизированные линейные интегралы интенсивности изображения по прямым в плоскости изображения. Метод, предложенный в [9], основан на этом преобразовании и состоит из двух основных этапов:

1. вычисление 2D ПХ, т.е. вычисление суммы интенсивностей изображения по параллельным прямым для набора выбранных направлений;
2. выбор единственного направления путем оптимизации интегрированного критерия, такого как сумма квадратов значений интенсивности (СКЗИ) или сумма квадратов градиентов интенсивности (СКГИ).

Наивная реализация шага (1) (наивный 2D ПХ) приводит к вычислительной сложности $O(N^3)$, где N - линейный размер изображения, предполагающий $O(N^2)$ выбранных направлений интегрирования. Чтобы преодолеть это ограничение, авторы статьи [9] предложили использовать 2D БПХ для ускорения первого этапа алгоритма.

Подход 2D БПХ, изначально предложенный Брэди и Ёном [18] для двумерных изображений с линейным размером $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, позволяет вычислять дискретизированные линейные интегралы по всему изображению с вычислительной сложностью $O(N^2 \log N)$. Для двумерного изображения размером $N \times N$, в рамках 2D БПХ обычно рассматриваются прямые вида $y(x) = s + \frac{tx}{N-1}$ (преимущественно горизонтальные) или $x(y) = s + \frac{ty}{N-1}$ (преимущественно вертикальные), с $s, t \in \mathbb{Z}$, записанные в стандартной системе координат изображения.

Достаточно ограничить вычисление дискретных линейных интегралов преимущественно горизонтальными неубывающими прямыми и дополнительно применить 2D БПХ к предвари-

тельно отражённому изображению, чтобы учесть оставшиеся ориентации. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только горизонтальные неубывающие линии $y(s, t)$ вида

$$y(s, t)(x) \stackrel{\text{def}}{=} s + \frac{tx}{N-1}, \quad s, t \in \mathbb{Z}_N,$$

где s определяет смещение прямой и t определяет угол наклона как $\arctan(t/(N-1))$; $\mathbb{Z}_N \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, N-1\}$ (Рис. 2(a)). Параметры (s, t) определяют так называемую st -параметризацию, используемую в 2D БПХ.

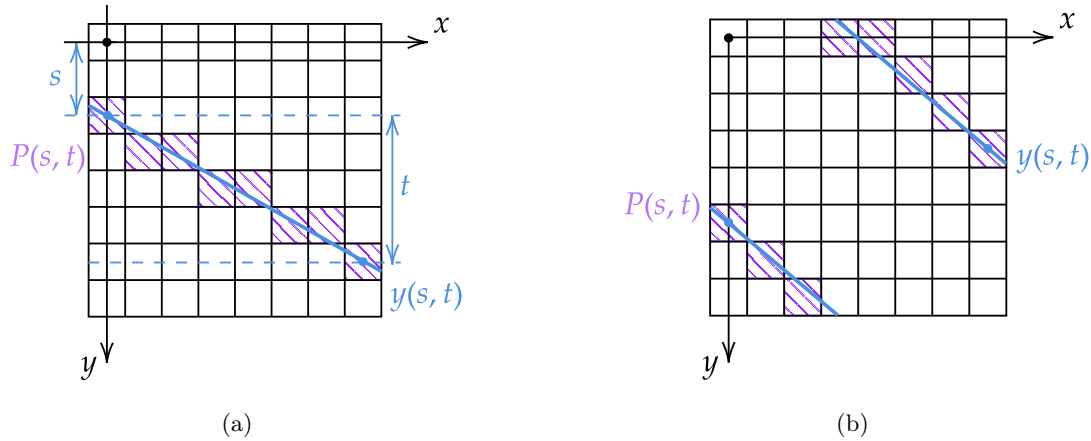


Рис. 2. (a) Пример паттерна $P(s, t)$, аппроксимирующего прямую $y(s, t)$ при $s = 2$ и $t = 4$ для изображения размера 8×8 ; (b) Пример паттерна $P(s, t)$ с параметрами $s = 5$ and $t = 6$, выходящего за границы изображения размера 8×8 .

В рамках определения 2D БПХ каждая непрерывная линия $y(s, t)$ аппроксимируется дискретной прямой, также называемой паттерном $P(s, t)$, который наследует st -параметризацию. Паттерны, построенные в рамках алгоритма Брэйд-Ёна (когда $N = 2^n$), обычно называются диадическими паттернами.

Результатом 2D БПХ является изображение H , оси которого соответствуют параметрам s и t ; пиксель с координатами $(s, t) \in \mathbb{Z}_N^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ хранит сумму интенсивностей входного изображения I вдоль соответствующего паттерна $P(s, t)$:

$$H(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{N-1} I(i, P(s, t)(i)).$$

Каждое значение t определяет одномерную проекцию $H(\cdot, t)$ исходного изображения, полученную вдоль семейства параллельных прямых с соответствующим углом наклона. На этапе (2) алгоритма, предложенного в статье [9], оптимизируется выбранный критерий, вычисляемые с помощью значений проекций.

Хотя ускорение, обеспечиваемое 2D БПХ, является весьма многообещающим, оно порождает несколько проблем, которые требуют детального рассмотрения. Во-первых, несмотря на различия в углах наклона, каждый паттерн соответствует дискретной прямой “фиксированной длины”, состоящей ровно из N пикселей. Более того, эти паттерны циклически продолжаются за границы изображения (аналогично поведению дискретного преобразования Фурье) (см. рисунок 2(b)). В результате получаются нефизичные дискретизированные прямые. Чтобы избежать такого эффекта, изображение обычно увеличивают вдвое по размеру, что, в свою очередь, удваивает время вычислений.

Вторая особенность заключается в том, что в рамках 2D БПХ семплирование прямых в st -параметризации по своей сути неравномерно. Расстояние между соседними прямыми (т.е. прямыми, значения s которых отличаются на единицу) изменяется в зависимости от t . Вектор нормали к прямой $y(s, t)$, аппроксимированной паттерном $P(s, t)$, можно записать через расстояние $\rho(t)$ между $y(s, t)$ и $y(s \pm 1, t)$ следующим образом:

$$\vec{n}(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\rho(t), \frac{-t\rho(t)}{N-1} \right), \quad \|\vec{n}(s, t)\| = 1,$$

где

$$\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \cos \arctan \frac{t}{N-1} = \frac{N-1}{\sqrt{(N-1)^2 + t^2}}.$$

Разброс значений $\rho(t)$ по t значителен: максимальное расстояние приходится на $t = 0$, где $\rho(0) = 1$, в то время как минимальное соответствует $t = N - 1$ (т.е. прямым под углом 45°), где $\rho(N - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (см. рисунок 3).

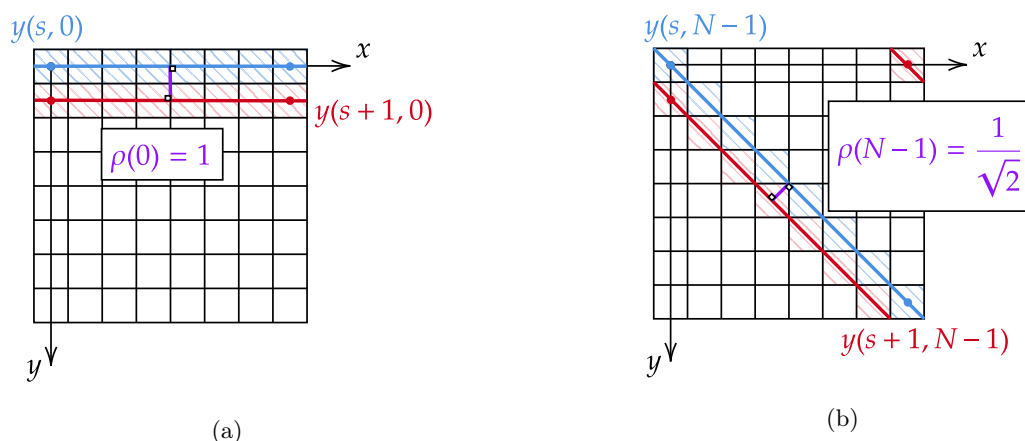


Рис. 3. Параметр t фиксирован, максимальное расстояние между 2 соседними прямыми $y(s, t)$ и $y(s \pm 1, t)$ достигается для $t = 0$ (а), и минимальное – для $t = N - 1$ (б).

Следовательно, чтобы сравнить значения метрик, вычисленных по проекциям $H(\cdot, t)$ с разными масштабами (с разным спейсингом параллельных прямых интегрирования), необходимо сначала интерполировать их в общую шкалу путем нормализации по координате s . Эта интерполяция должна сохранять общий интеграл проекции (инвариант Радона), что требует повторной нормализации интенсивности после изменения масштаба координаты s [19].

В то время как перечисленные трудности считаются решёнными для 2D случая [19], эти особенности необходимо аккуратно адаптировать к 3D случаю, а также учесть новые возникающие проблемы, что и составляет основную тему следующего раздела.

3. АВТОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОРТОТРОПНОГО ВЫРАВНИВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРЕОБРАЗОВАНИИ ХАФА

3.1. Наивный алгоритм ортотропного выравнивания

Следуя формулировкам, представленным в разделе 2.1, анизотропные оси в общем случае могут быть определены через различные угловые зависимости свойств объекта. Однако при промышленном применении компьютерной томографии особенно важными с практической

точки зрения являются оси симметрии и плоские поверхности объектов. Эти структуры облегчают как визуальный, так и автоматизированный анализ, обеспечивают естественную связь между геометрическими примитивами и САПР (CAD)-моделями, а так же являются вспомогательным этапом совмещения различных объемных изображений. В сопоставимых условиях анализ параллельных линейных проекций изображения уже продемонстрировал свою эффективность в двумерном случае [9], и поэтому ожидается, что он будет столь же перспективным и в случае анализа трехмерных изображений. Поскольку плоские детали на трехмерных изображениях обычно более выражены, чем строго линейные детали (такие как отрезки), более целесообразно аккумулировать проекции вдоль плоскостей, а не вдоль прямых. Основная идея предлагаемого нами подхода заключается в том, что, когда направление проекции совпадает со структурной деталью, L_2 -норма (или сумма квадратов значений интенсивности, СКЗИ) результирующего одномерного проекционного сигнала (полученных с помощью семплирования параллельными плоскостями с фиксированным интервалом) достигает локального углового максимума (в сферических координатах). В то же время, L_1 -норма того же сигнала, представляющая инвариант Радона, остается постоянной во всех направлениях (см. раздел 2.1). Следовательно, максимизация L_2 -нормы эквивалентна максимизации критерия дисперсии в уравнении 6.

Таким образом, наивный алгоритм ортотропного выравнивания может быть сформулирован как два последовательных основных этапа:

1. оценка значений критерия, с помощью значений проекций вдоль направлений, равномерно семплированных на сферической поверхности, и
2. определение базиса, который оптимизирует суммарные значения критериев для трех ортотропных осей.

Первый шаг может быть реализован простым способом – уменьшением размерности за счет вращения и суммирования. Следует подчеркнуть, что разумное количество точек выборки на сфере составляет порядка $O(N^2)$ (равномерно-семплированная поверхность сферы), что приводит к общей алгоритмической сложности $O(N^5)$.

Второй шаг значительно менее требователен к вычислениям. В случае идеальных ортотропных изображений, для которых оси анизотропии строго перпендикулярны, выбор стратегии оптимизации не имеет решающего значения: оптимизация по глобальному критерию может быть выполнена любым подходящим способом.

Однако для неидеальных ортотропных изображений реализация должна быть адаптирована к конкретной задаче. С одной стороны, для стандартизации ориентации более целесообразно оптимизировать общие значения показателей по всему базису (т.е. общий критерий для всех трех осей), поскольку такой подход, как правило, дает согласованные результаты, даже если оси анизотропии не являются идеально ортогональными. С другой стороны, для задач, направленных на упрощение анализа изображений, более важно обеспечить, чтобы по крайней мере одна ось точно совпадала с направлением анизотропии. В этом случае предпочтительна стратегия последовательной оптимизации: во-первых, выбирается ось, соответствующая глобальному оптимуму критерия; во-вторых, рассматривается плоскость, перпендикулярная этой оси, и в пределах этой плоскости определяется вторая ось; наконец, третья ось однозначно определяется из условия ортогональности к первым двум.

Хотя наивный подход обеспечивает точное решение задачи, сформулированной в разделе 2.1 (с точностью до ошибок дискретизации и семплирования), вычислительная сложность делает его непрактичным для реальных задач и систем. К счастью, был предложен эффективный метод одновременного вычисления сумм по всем дискретным плоскостям изображения [20]. Вычислительная сложность этого метода составляет всего $O(N^3 \log N)$, что даже меньше, чем при классической томографической реконструкции, требующей $O(N^4)$ операций [21].

Хотя эта оптимизация обладает значительным потенциалом, её реализация сталкивается с рядом проблем, включающих, но не исчерпывающихся теми, что возникают в 2D случае. Решение этих проблем является необходимым условием для создания оптимизированной версии наивного подхода в случае 3D. Разработка такого решения является основной целью последующих разделов данной статьи.

3.2. Вычисление быстрого преобразования Хафа в трехмерном случае

В этой статье мы рассмотрим расширение ПХ на трехмерный случай в качестве компонента предлагаемого нами алгоритма ортотропного выравнивания. Обобщенное для трехмерного случая, ПХ позволяет вычислять дискретизированные интегралы объемного изображения по плоскостям в трехмерном пространстве. Другими словами, 3D ПХ можно рассматривать как метод вычисления проекций объемного изображения вдоль плоскостей с различными направлениями нормалей $\vec{n} \in S^2$. Хорошо известный быстрый алгоритм для вычисления 3D ПХ (т.е. 3D БПХ), алгоритм Брэйд-Бу [20] позволяет вычислять аппроксимированные суммы по $\Theta(N^3)$ плоскостям с вычислительной сложностью всего $O(N^3 \log N)$, где $N = 2^n$ обозначает линейный размер объема. Это значительно эффективнее, чем наивный подход, который потребовал бы $\Theta(N^5)$ операций (см. раздел 3.1).

Аналогично 2D БПХ, 3D БПХ в рамках концепции Брэйд-Бу ведет подсчет на фиксированном наборе непрерывных плоскостей. Эти плоскости аппроксимируются дискретными плоскостными паттернами, вдоль которых суммируются интенсивности вокселей. Для кубического изображения размером $N \times N \times N$ в 3D БПХ традиционно рассматриваются непрерывные плоскости $y(s, t_1, t_2)$, каждая из которых определяется тремя точками в естественной системе координат изображения:

$$(s, 0, 0), \quad ((s + t_1) \bmod N, N - 1, 0), \quad ((s + t_1 + t_2) \bmod N, N - 1, N - 1),$$

где $s, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_N$. Достаточно ограничить 3D БПХ такими плоскостями, поскольку обработка плоскостей, симметричных тем, которые уже определены выше, потребует только правильного транспонирования или зеркального отражения входного изображения. Таким образом, тройка параметров (s, t_1, t_2) служит естественным трехмерным обобщением классической (s, t) параметризации прямых в двумерной плоскости.

В зависимости от ориентации вектора нормали к плоскости и, в частности, от того, по какой из координатных осей эта нормаль преимущественно выровнена, можно выделить двенадцать различных типов плоскостей [10]. Множество плоскостей, проходящих через наборы точек вышеупомянутого вида, определяет один такой тип, в то время как остальные одиннадцать групп получают как его симметрии.

Каждая плоскость $y(s, t_1, t_2)$ в алгоритме Брэйд-Бу аппроксимируется так называемым диадическим (плоскостным) паттерном $P(s, t_1, t_2)$ [22], который обобщает двумерные диадические паттерны, используемые в алгоритме Брэйд-Ёна для 2D БПХ. Рисунок 4 иллюстрирует пример такой диадической плоскости.

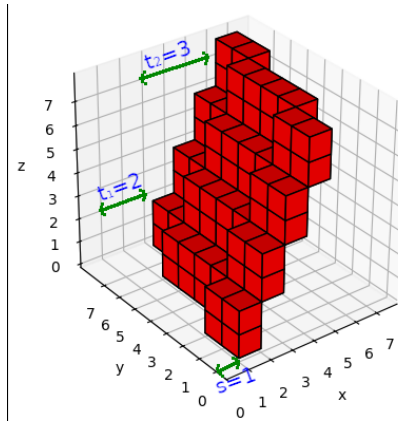


Рис. 4. Диадическая плоскость для $s = 1$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$ и размера объема – $8 \times 8 \times 8$

Для входного изображения I размером $N \times N \times N$, на выходе 3D БПХ получается трехмерное изображение, оси которого соответствуют параметрам s, t_1, t_2 . Преобразование задается как

$$H(s, t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=0}^{N-1} I(P(s, t_1, t_2)(i, j), i, j).$$

Диадические плоскости по своей структуре являются замкнутыми, циклическими (циклически продолженными за границы изображения), как и диадические прямые в случае 2D БПХ. На практике циклические плоскости являются нефизическими; поэтому для выполнения интегрирования по не зацикленным плоскостям в 3D БПХ входной объем дополняется нулями на $2N$ вокселей вдоль оси Ox . Следовательно, входной объем имеет размеры $3N \times N \times N$, где параметр s находится в диапазоне от 0 до $3N - 1$ вместо от 0 до $N - 1$. Для вычисления трехмерного БПХ мы также используем реализацию Ершова [10] с описанным дополнительным расширением нулями.

В случае трехмерного БПХ, как и в случае двумерного БПХ, остается проблема неравномерной выборки плоскостей интегрирования. Действительно, для некоторых фиксированных t_1 и t_2 , $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_N$ расстояние между двумя последовательными параллельными плоскостями (т.е. для s и $s \pm 1$) вычисляется как

$$\rho(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N - 1}{\sqrt{(N - 1)^2 + t_1^2 + t_2^2}}.$$

В частности, единичный вектор нормали $\vec{n}(t_1, t_2)$ плоскости с параметрами (s, t_1, t_2) принимает вид

$$\vec{n}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\rho(t_1, t_2), -\frac{t_1 \rho(t_1, t_2)}{N - 1}, -\frac{t_2 \rho(t_1, t_2)}{N - 1} \right).$$

Разброс значений ρ , представляющих расстояния между последовательными параллельными плоскостями интегрирования в зависимости от t_1 и t_2 , значителен: ρ варьируется от $1/\sqrt{3}$ для $t_1 = t_2 = N - 1$ до 1 для $t_1 = t_2 = 0$. В рамках нашего подхода к ортотропному выравниванию трехмерного изображения эта неравномерность выборки компенсируется интерполяцией изображения Хафа по параметру s .

В частности, поскольку расстояние $\rho(t_1, t_2)$ между двумя соседними параллельными плоскостями с параметрами (s, t_1, t_2) и $(s \pm 1, t_1, t_2)$ не превышает 1, тензор H может быть интер-

полирован в точках $(k/\rho(t_1, t_2), t_1, t_2)$, $k \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq k \leq \lfloor (N-1)\rho(t_1, t_2) \rfloor$, следующим образом:

$$H\left(\frac{k}{\rho(t_1, t_2)}, t_1, t_2\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{3N-1} H(s, t_1, t_2) \mu\left([s, s+1] \cap \left[\frac{k}{\rho(t_1, t_2)}, \frac{k+1}{\rho(t_1, t_2)}\right]\right), \quad (7)$$

где μ обозначает меру длины пересечения 2 отрезков. Эта процедура в конечном итоге позволяет посчитать плоские интегралы, соответствующие эквидистантным плоскостям интегрирования (с единичным интервалом), тем самым эффективно компенсируя неравномерную выборку плоскостей интегрирования в БПХ. Важно отметить, что предложенная процедура сохраняет инвариант Радона – L_1 -норму проекции $H(\cdot, t_1, t_2)$:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor (N-1)\rho(t_1, t_2) \rfloor} H\left(\frac{k}{\rho(t_1, t_2)}, t_1, t_2\right) = \text{const}$$

для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_N$.

Далее значения $H\left(\frac{k}{\rho(t_1, t_2)}, t_1, t_2\right)$ будут использованы для вычисления согласованных значений критериев для семейств параллельных плоскостей.

3.3. Критерий СКГИ как функция анизотропии

В соответствии с разделом 3.1, максимизация дисперсии, которая эквивалентна максимизации СКЗИ одномерного сигнала, представленного проекциями плоскостей, достаточна для определения направлений анизотропии. В качестве альтернативы, можно максимизировать сумму квадратов градиентов интенсивности (СКГИ), что имеет то же значение, что и максимизация дисперсии градиентов [9]. Следовательно, и СКЗИ, и СКГИ можно рассматривать как частные случаи функции анизотропии $A^{(d)}$, введенной в разделе 2.1.

Рассмотрим дискретный одномерный сигнал $y = (y_i)_{i=0}^{N-1}$, полученный по точкам, семплированным на единичном расстоянии. Сигнал соответствует непрерывной функции Y , с носителем в интервале (a, b) ($Y(a) = Y(b) = 0$). Критерии СКЗИ и СКГИ сформулированы следующим образом:

$$\begin{aligned} SSV(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{N-1} y_i^2, \\ SSG(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N-1} (y'_i)^2 \equiv \sum_{i=1}^{N-1} (y_i - y_{i-1})^2, \end{aligned} \quad (8)$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} SSV(y) &\sim \text{Mean } y^2 \sim \text{Mean } Y^2 = \text{Var } Y + (\text{Mean } Y)^2 = \text{Var } Y + c^2, \\ SSG(y) &\sim \text{Mean } (y'^2) \sim \text{Mean } (Y'^2) = \text{Var } Y' + (\text{Mean } Y')^2 = \text{Var } Y', \end{aligned} \quad (9)$$

где Mean обозначает среднее значение дискретного одномерного сигнала y или его непрерывного аналога Y :

$$\text{Mean } y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i, \quad \text{Mean } Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b Y(x) dx,$$

и Var обозначает дисперсию значений дискретного или непрерывного сигнала соответственно

$$\text{Var } y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mean } y^2 - (\text{Mean } y)^2, \quad \text{Var } Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mean } Y^2 - (\text{Mean } Y)^2.$$

Здесь $\sim$ указывает на пропорциональность. Используются два ключевых замечания:

$$\text{Mean } y \sim \text{Mean } Y = \frac{1}{b-a} \int_a^b Y(x) dx = c = \text{const},$$

поскольку интеграл Y каждой проекции постоянен и равен $c = \text{const}$ для всех направлений проекции, и

$$\begin{aligned} \text{Mean } Y' &= \frac{1}{b-a} \int_a^b Y'(x) dx = Y(b) - Y(a) = 0, \\ \text{Mean } y' &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (y_i - y_{i-1}) = y_{N-1} - y_0 = 0, \end{aligned}$$

при естественном предположении о сигнале с конечным носителем (т.е. $Y(a) = Y(b) = 0$ и $y_0 = y_{N-1} = 0$). Математически, для данных сигналов,

$$SSG(y) = 2SSV(y) - 2 \sum_{i=1}^{N-1} y_i y_{i-1},$$

с компонентой $\sum_{i=1}^{N-1} y_i y_{i-1}$, представляющую собой проекционную автокорреляцию (со сдвигом 1), или смещенное скалярное произведение проекционного сигнала. Таким образом, критерии СКЗИ и СКГИ часто приводят к схожим результатам. Однако на практике было показано, что СКГИ более чувствителен к слабым структурным особенностям и широко используется для стандартизации ориентации изображений [9]. Поэтому мы в дальнейшем сосредоточимся на применении критерия СКГИ для построения алгоритма ортотропного выравнивания.

В случае одного особого направления (или множества отдельных направлений) основная сложность при вычислении критерия возникает из-за зависимости расстояния между соседними плоскостями интегрирования от ориентации их нормали, что присуще 3D БПХ. Как обсуждалось в предыдущем разделе, это требует пересемплирования интегралов по плоскостям на регулярную (эквидистантную) сетку и применения перенормировки для сохранения инварианта Радона. После этих корректировок, при поиске одного направления анизотропии, уравнение 6 может быть переписано в терминах критерия СКГИ на основе 3D БПХ следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{l}^* &= \vec{n}(t_1^*, t_2^*), \\ (t_1^*, t_2^*) &= \operatorname{argmax}_{t_1, t_2} SSG(H(\cdot/\rho(t_1, t_2), t_1, t_2)). \end{aligned} \quad (10)$$

Оценка направления анизотропии по уравнению 10 обеспечивает вычислительную сложность поиска порядка $\Theta(N^2)$ для одного направления.

Наряду с этим, при выделении ортотропных признаков и при построении ортонормированного базиса возникает дополнительная трудность. Направления на сфере выбраны неравномерно в рамках этапа вычисления трехмерного БПХ, поэтому не для каждого семплированного направления существует ортогональное дополнение в выборке, необходимое для формирования полного ортогонального базиса. В таких случаях значения критериев для ортогональных направлений должны быть интерполированы по имеющимся выборкам. Интерполяция значения СКГИ-критерия в заданном направлении $\vec{v}$ может быть выполнена с использованием, например, квадратичной или кубической интерполяции значений СКГИ-критерия, связанных с выбранными нормальными $\vec{n}(t_1, t_2)$, ближайшими к $\vec{v}$ (в терминах косинусоидального расстояния). Мы будем обозначать интерполированное значение критерия СКГИ в заданном направлении $\vec{v}$ через $SSG(\vec{v}, H)$:

$$SSG(\vec{v}, H) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t_1, t_2} w(\vec{v}, t_1, t_2) SSG(H(\cdot/\rho(t_1, t_2), t_1, t_2)), \quad (11)$$

где $w(\vec{\nu}, t_1, t_2)$ обозначает вес направления $\vec{n}(t_1, t_2)$, который пропорционален косинусному расстоянию между $\vec{\nu}$ и $\vec{n}(t_1, t_2)$. Естественно, для $\vec{\nu} = \vec{n}(t_1, t_2)$, имеем

$$SSG(\vec{n}(t_1, t_2), H) = SSG(H(\cdot/\rho(t_1, t_2), t_1, t_2)).$$

Важно, что в контексте нашего подхода, $A^{(d)}(\vec{l})$ может рассматриваться конкретно как функция $SSG(\vec{l}, H)$. Далее, чтобы найти целевой ортогональный базис, может быть использована стратегия оптимизации переборного метода: сначала мы выбираем возможное направление $\vec{l} = \vec{n}(t_1, t_2)$, затем генерируем N пар $(\vec{l}_k, \vec{l}_k^{\perp})$, $k \in \mathbb{Z}_N$ взаимно ортогональных векторов в плоскости, перпендикулярной $\vec{l}$, и находим пару $(\vec{l}, \vec{l}^{\perp})$, максимизирующую сумму $SSG(\vec{l}, H) + SSG(\vec{l}^{\perp}, H)$. Следовательно, целевой базис является максимизацией следующего выражения:

$$(\vec{l}, \vec{l}^{\perp}) = (\vec{n}(t_1^*, t_2^*), \vec{l}_{k^*}^{\perp}, \vec{l}_{k^*}^{\perp}),$$

$$(t_1^*, t_2^*, k^*) = \arg \max_{t_1, t_2} \arg \max_k \left(SSG(\vec{n}(t_1, t_2), H) + SSG(\vec{l}_k, H) + SSG(\vec{l}_k^{\perp}, H) \right). \quad (12)$$

Максимизация последнего выражения приводит к интегральной вычислительной сложности $\Theta(N^3)$ для всего алгоритма поиска базиса.

3.4. Реализация алгоритма

В этом разделе мы сформулируем итоговый алгоритм ортотропного выравнивания, объединив шаги и решения, описанные выше. Алгоритм представлен в виде последовательности шагов, с дополнительным раскрытием более сложных компонент.

Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Вычисление 3D БПХ.
 - (а) Сжатие объема до линейного размера $N = 2^n$.
 - (б) Дополнение объема нулями вдоль направления (Ox) до размера $3N$.
 - (с) Применение 3D БПХ к дополненному объему [10].
2. Пересемплирование и перемасштабирование каждой проекции $H(\cdot, t_1, t_2)$ в пространстве Хафа (в пространстве аккумулятора) по формуле 7.
3. Вычисление значений критерия СКГИ (уравнение 8) для каждого направления $\vec{n}(t_1, t_2)$
4. Выбор единственного направления анизотропии (набора различных направлений анизотропии) или базиса, максимизирующих значение критерия с помощью выбранной стратегии:
 - (а) Для одного направления или набора направлений анизотропии: выбор направлений с глобальным максимальным значением критерия СКГИ или набором локальных максимумов критерия (см. уравнение 10).
 - (б) Для стандартизации ориентации базиса: для каждого направления $\vec{l}$ семплирование N пар ортогональных направлений $(\vec{l}_k, \vec{l}_k^{\perp})$, $k \in \mathbb{Z}_N$, в плоскости, ортогональной к $\vec{l}$ и нахождение пары $(\vec{l}, \vec{l}^{\perp})$, которая максимизирует общее значение критерия, т.е. оценка базиса выполняется в соответствии с уравнением 12.
 - (с) Для упрощения анализа выбираем одно фиксированное направление $\vec{l}$, максимизирующее значение критерия (или набор направлений локальных максимумов) в соответствии с уравнением 10, выбираем два других направления из плоскости, ортогональной $\vec{l}$, с помощью максимизации критерия в плоскости, аналогичной 4b. Эта стратегия отличается от стратегии 4b тем, что первое направление определяется независимо от двух остальных.

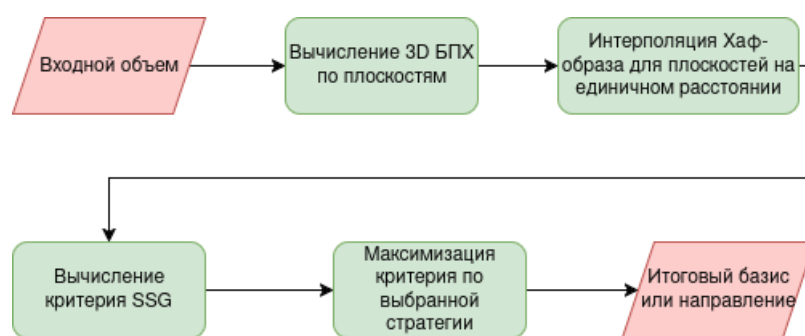


Рис. 5. Блок-схема алгоритма ортотропного выравнивания трехмерных изображений.

Блок-схема алгоритма продемонстрирована на рисунке 5.

Для шага 1 мы используем реализацию, аналогичную той, что описана в [10]. Эта реализация ограничена объемами размером $N = 2^n$, что требует выполнения шага 1а. На практике данная проблема обычно решается в алгоритмах компьютерной томографии (КТ) с помощью пересемплирования на целочисленную сетку в сочетании с дополнением нулями по меньшим размерностям. Следует подчеркнуть, что, хотя требование $N = 2^n$ для размерности входного изображения упрощает вычисление трехмерного БПХ с помощью классических алгоритмов, оно не является фундаментальным ограничением: в двумерном случае это ограничение уже было успешно преодолено. [23, 24, 25, 26]. Плоскостное трехмерное БПХ можно рассматривать как последовательное применение 2 двумерных БПХ в ортогональных плоскостях. Следовательно, хотя эта тема выходит за рамки настоящей статьи, многие оптимизации и практические усовершенствования, разработанные для 2D преобразования, могут быть непосредственно применены к 3D случаю.

Шаг расширения нулями 1b, предшествующий основным вычислениям, направлен на то, чтобы избежать циклического сдвига паттерна, который приводит к нефизичным циклическим траекториям. Необходимость этого конкретного шага в контексте ортотропного выравнивания является спорной, и потенциально его можно пропустить, что позволит уменьшить объем памяти в 3 раза и сократить время вычислений.

Шаг 1с выполняется индивидуально для разных типов плоскостей (всего 12 типов плоскостей, где нормали имеют одно из 3 основных направлений Ox , Oy или Oz с 4 положительными и отрицательными комбинациями t_1, t_2) путем последовательного $Oxy-Oxz$ вычисления 2D БПХ (первое 2D вычисление БПХ по плоскости Oxy , второе вычисление - по плоскости Oxz) [10].

Основным ограничением этого шага является дополнительная память, необходимая для хранения первых результатов 2D БПХ для одного типа плоскости, $M(N) = 3N^3$ (всего 12 различных типов плоскостей). Второе 2D БПХ может быть вычислено с переиспользованием выделенной памяти, в то время как результаты шага 3 требуют всего $12N^2$ значений и могут быть обработаны между вычислениями Хаф-образов для 12 различных типов плоскостей.

Выбор конкретной стратегии в рамках последнего шага должен зависеть от целевой задачи, будь то определение осей анизотропии или стандартизация ориентации для выбора единственного базиса, с выбором стратегии между локальной или глобальной оптимизацией. Общая асимптотическая сложность алгоритма определяется трехмерным БПХ с использованием $O(N^3 \log N)$ необходимых операций, этапы 2 и 3 имеют сложность $O(N^3)$, в то время как последний этап оптимизации соответствует сложности либо $O(N^2)$, либо $O(N^3)$ в зависимости от поиска выбора между поиском оси или полного базиса.

Реализация алгоритма в виде пользовательских скриптов на языке Python может быть предоставлена по запросу.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

4.1. Данные и методы

Предобработка данных

Для оценки качества алгоритма был подготовлен небольшой набор данных, включающий:

- реконструкцию данных микротомографии объектов DDR3 RAM (оперативная память) и PCB (печатная плата) (Рис. 6(a–c)) размера $292 \times 714 \times 1118$;
- реконструкцию данных микротомографии бумажного свитка с напечатанными буквами высокого контраста (Рис. 6(d–f)) размером $512 \times 235 \times 235$;
- и синтетические данные, сгенерированные из простой САПР-модели видеокарты GeForce RTX 4060 [27] (Рис. 6(g–i)) размерности $512 \times 512 \times 512$.

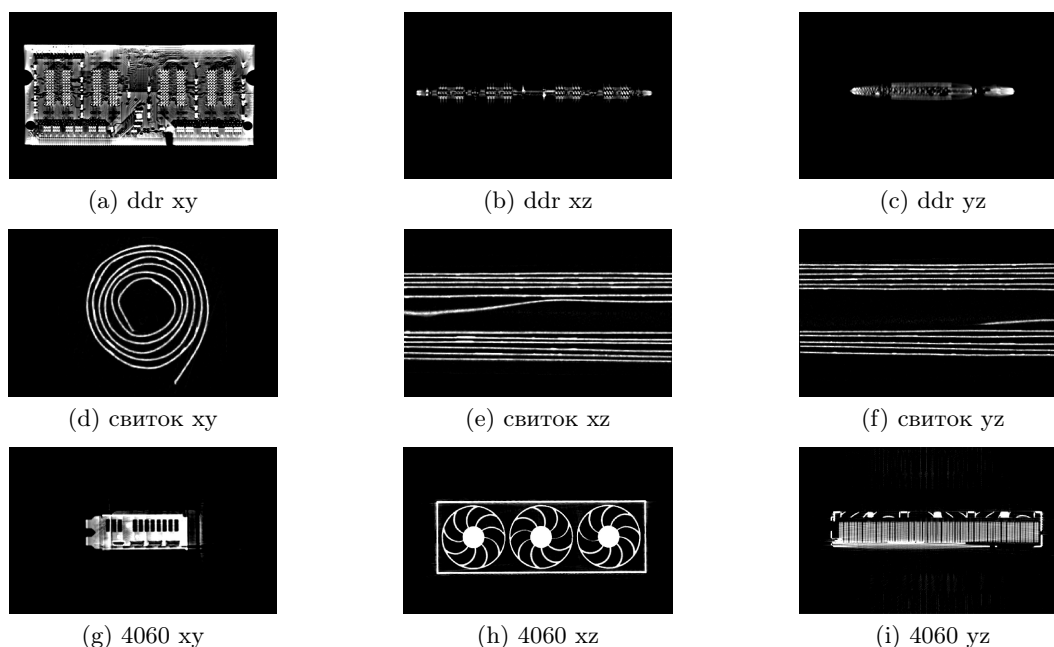


Рис. 6. Примеры двумерных срезов объектов. Визуализация виртуальных ортогональных срезов для “ddr”, “свитка” и “САПР_4060” тестовых объектов в эталонной ориентации.

Реальные данные были получены с помощью лабораторной микро-КТ установки ИППИ РАН, работающей на энергиях до 130 кэВ и обеспечивающей пространственное разрешение до 50 мкм. Как реальные, так и синтетические наборы данных были реконструированы с помощью коммерческого программного обеспечения Smart Tomo Engine (STE) [28]. Смоделированные проекции были созданы с использованием пакета моделирования X-CIST [29], при этом параметры были выбраны так, чтобы они точно соответствовали параметрам лабораторной микротомографической системы.

Для трехмерных объемных изображений реальных объектов идеальное ортотропное выравнивание выполнялось вручную с помощью интерактивных инструментов преобразования объема, доступных в программном обеспечении STE. Точность этой процедуры анализируется в следующем разделе. Результирующие (ортотропно) «выровненные» данные рассматривались

как эталонные изображения (GT, ground truth), которые впоследствии преобразовывались для создания тестовых наборов данных. Заданные известные преобразования позволяют вычислить целевые базисные вектора с высокой точностью.

Следует отметить, что в случае реальных измеренных данных объемы с наклоненной (невыверенной) ориентацией были получены путем применения простых преобразований к «выровненным» изображениям. В то время как в реальных экспериментах артефакты реконструкции, такие как кольца, полосы или геометрические искажения, часто имеются в независимости от особенностей объекта, в используемой синтетической генерации это условие нарушается, и такие эксперименты с реальными данными следует рассматривать скорее как тестирование, чем как полноценную валидацию. В отличие от этого, смоделированные данные были получены путем виртуального преобразования САПР-модели с последующей генерацией КТ проекций наклоненного объекта и автоматической реконструкцией. В этом случае неточности реконструкции определяются не только исследуемым объектом, но и схемой КТ эксперимента, и такие эксперименты следует считать более надежными.

Оценка качества для различных задач

Поскольку часть тестового набора получена на основе реальных экспериментальных данных, где выравнивание было достигнуто с помощью ручных операций, целесообразно обсудить точность результирующего преобразования, которое, как предполагается, соответствует целевому эталону.

Точность ортотропного выравнивания для реальных данных должна рассматриваться с точки зрения целевой области применения, для решения задач которой предполагается применять выровненные данные. В случае анализа печатных плат основной сценарий включает визуализацию, а также автоматическую сегментацию и идентификацию печатных дорожек. В общем случае можно предположить, что целевой выровненный срез объема не должен смещаться более чем на половину глубины дорожки d по максимальному линейному размеру печатной платы L , что может быть формализовано следующим образом

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \arctan \frac{d}{2L}, \quad (13)$$

где α обозначает максимальную допустимую ошибку определения ориентации. Эта оценка, с одной стороны, характеризует точность полученного целевого изображения, а с другой стороны, устанавливает нижнюю границу требуемой точности: ошибки смещения, меньшие, чем α , являются допустимыми для успешного решения задачи.

В случае набора данных оперативной памяти DDR3, описанного в разделе 4.1, можно получить оценку $\alpha = 0.1^\circ$ соответствующую значениям $d = 3$ и $L = 980$.

Рассматривая свиток как цилиндрическую разворачивающуюся поверхность, можно применить ту же логику, и в уравнении оценки 13 получить оценку $\alpha = 0.16^\circ$ при $d = 3$ и $L = 537$.

Здесь мы не рассматриваем проблему точности синтетических данных на основе САПР, поскольку они получены непосредственно из векторизованной модели. В этом случае основными источниками ошибок связаны с семплированием виртуального детектора и систематические эффекты вокселизации [30], которые, как ожидается, будут относительно небольшими и сопоставимы с ошибками, возникающими при повторном семплировании объема, при преобразовании на этапе виртуального выравнивания. Таким образом, преобразование целевого объема можно условно считать известным точно.

Метрики качества

Рассмотрим три системы координат:

- координатная система эталона v_{GT} ,
- система координат исходного (невыворненного) объема $v_R \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$,
- и система координат результирующего (выворненного) объема $v_A \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3\}$.

Введем метрику качества стандартизации ориентации вместе с соответствующей процедурой оценки.

Для предварительно выворненного объема v_{GT} представлен единичной матрицей. Эквивалентно, эталонная система координат v_{GT} связана со стандартным ортонормированным базисом,

$$v_{GT} \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}.$$

Предполагается, что эта глобальная система координат v_{GT} является фиксированной.

Алгоритм ортотропного выравнивания возвращает три ортотропных направления, образующих базис v_A , который соответствует ортотропным характеристикам входного объема. Преобразование, построенное на основе этих направлений, затем используется для выравнивания входного изображения. В частности, линейное отображение базиса v_R на v_A определяется в глобальной системе координат матрицей

$$\mathbf{T}_{v_R \rightarrow v_A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_C(v_A) \cdot (\mathbf{R}_C(v_R))^{-1},$$

где

$$\mathbf{R}_C(v_A) \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{v}'_1 \ \vec{v}'_2 \ \vec{v}'_3], \quad \mathbf{R}_C(v_R) \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3],$$

с векторами, заключенными в квадратные скобки, интерпретируемыми как столбцы матрицы. Применяя обратное преобразование $\mathbf{T}_{v_R \rightarrow v_A}^{-1}$ к воксельным координатам входного объема, получаем выворненное изображение.

В идеальном случае алгоритм возвращает базис v_{GT} , и преобразование, которое преобразует v_R в v_{GT} , задается формулой

$$\mathbf{T}_{v_R \rightarrow v_{GT}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_C^{-1}(v_R).$$

Применение обратного преобразования $\mathbf{T}_{v_R \rightarrow v_{GT}}^{-1}$ к координатам вокселей входного изображения позволяет вычислить выворненное изображение для исходного входного объема.

В качестве показателя качества, основанного на GT, для оценки алгоритмов ортотропного выравнивания мы предлагаем использовать остаточный угол поворота $d\phi$ между v_{GT} и v_A , который может быть рассчитан по формуле [31]

$$d\phi \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{\text{tr } \mathbf{R}_C(v_A) - 1}{2}, \quad (14)$$

tr обозначает след матрицы. Другими словами, $d\phi$ измеряет расстояние между вычисленным преобразованием $\mathbf{T}_{v_R \rightarrow v_A}$, полученным на выходе алгоритма и эталонным преобразованием $\mathbf{T}_{v_R \rightarrow v_{GT}}$.

В особом случае, когда объем имеет единственную ось анизотропии (соответствующую $\vec{v}_3$ в v_R и $\vec{v}'_3$ в v_A), показатель оценки качества может быть упрощен до

$$d\phi \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{(\vec{v}'_3, \vec{e}_3) - 1}{2},$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов. Это выражение количественно характеризует меру отклонения вектора от направления исходной оси.

Следует отметить, что в общем случае базис, полученный с помощью алгоритма ортотропного выравнивания, определяется с точностью до знака направлений и перестановок базисных

векторов, что приводит к $3! \cdot 2^3 = 48$ комбинациям. Из них только 24 соответствуют правосторонним системам координат, что по-прежнему представляет собой значительное число альтернатив. Чтобы должным образом учесть эти неоднозначности при оценке качества относительно эталонных осей, используется минимизация итоговой угловой ошибки с помощью перебора альтернатив. Эта процедура позволяет получить не только количественное значение, но и определить конкретную комбинацию базисных векторов, которая наиболее точно соответствует базису исходного объемного изображения.

4.2. Оценка и сравнение качества результатов работы алгоритмов

Чтобы оценить и сравнить качество различных алгоритмов (как известных, так и предлагаемого в данной работе), мы провели следующий набор экспериментов. Трехмерное изображение, соответствующее v_R , было сгенерировано на основе исходного изображения v_{GT} путем применения двух последовательных поворотов вокруг осей Ox и Oy . Углы поворота систематически изменялись в рамках множества $\{0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ\}$ с дополнительным случайным дополнительным поворотом в диапазоне $(-2^\circ, +2^\circ)$, который был реализован с использованием фиксированного начального значения генератора случайных чисел (seed), общего для всех алгоритмов. Затем каждый алгоритм вычислял v_A , по которому вычислялась остаточная угловая ошибка $d\phi$. Для каждого алгоритма и тестового объекта была собрана статистика по всем 49 ориентациям.

Следует отметить, что объект свиток соответствует случаю с одной осью анизотропии, в то время как оба других объекта соответствуют случаю с ортотропным выравниванием (имеют ортонормированные базисы из осей анизотропии).

Результаты этого набора экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Оценка качества алгоритмов ортотропного выравнивания (мин, макс, ср, мед).

Объект	Тензор инерции				Структурный тензор				RANSAC				Брейди–Бу 256			
	мин	макс	ср	мед	мин	макс	ср	мед	мин	макс	ср	мед	мин	макс	ср	мед
САПР_4060	2.7	48.8	22.8	19.4	1.5	44.5	17.9	15.3	0.5	32.3	7.9	3.3	0.2	4.7	2.4	2.4
ddr	0.8	44.0	12.4	8.8	1.2	32.6	14.6	13.0	0.2	4.4	1.9	1.4	0.02	2.1	0.7	0.6
свиток	1.2	33.0	9.2	9.6	1.8	7.5	5.7	6.0	0.5	3.4	2.4	2.6	0.05	0.8	0.3	0.3

Та же экспериментальная процедура была повторена для предложенного метода, чтобы исследовать зависимость точности выравнивания от степени сжатия входного изображения. Этот параметр играет решающую роль, поскольку определяет соотношение между эффективностью вычислений и качеством решения. Соответствующие результаты подытожены в таблице 2. Рядом с названием алгоритма указан линейный размер кубического изображения (N), полученный после сжатия, и с последующей передачей сжатого объема в алгоритм в качестве входных данных.

Таблица 2. Зависимость точности выравнивания от различных параметров сжатия входного изображения для предлагаемого метода (мин, макс, ср, мед).

Объект	Брейди–Бу ($N = 64$)				Брейди–Бу ($N = 128$)				Брейди–Бу ($N = 256$)				Брейди–Бу ($N = 512$)			
	мин	макс	ср	мед	мин	макс	ср	мед	мин	макс	ср	мед	мин	макс	ср	мед
cad_4060	0.5	9.4	3.4	3.0	0.6	14.8	3.0	2.6	0.2	4.7	2.4	2.4	0.3	4.6	2.4	2.5
ddr	0.6	7.7	2.8	2.6	0.1	3.5	1.3	1.1	0.02	2.1	0.7	0.6	0.05	2.3	0.9	0.9
scroll	0.3	3.5	1.3	1.2	0.02	1.4	0.5	0.4	0.05	0.8	0.3	0.3	0.03	0.6	0.3	0.3

Объемные изображения были сжаты до кубического размера, равного $N \times N \times N$, где N – заданная степень двойки, следующим образом. Сначала, при необходимости, исходное

изображение дополнялось нулями по каждому измерению, чтобы получить кубический объем линейного размера, кратного степени двойки N . Затем изображение было равномерно сжато по всем осям с одинаковым коэффициентом масштабирования, так что размер N' был уменьшен до целевого размера степени двойки N .

В следующем разделе мы обсудим эти результаты более подробно.

4.3. Обсуждение результатов

Представленные численные эксперименты (таблица 1) демонстрируют превосходство предложенного метода в каждой исследуемой категории, в основном показывая лучшие количественные результаты. Эти результаты подтверждают робастность, универсальность и высокую точность предлагаемого метода.

Основным ограничением для метода, основанного на 3D ПХ, остается выбранное разрешение анализируемого объема. Это означает, что целевая точность может быть настроена на основе ограничений по времени и объему оперативной памяти, используемых алгоритмом. Проведенный численный эксперимент (таблица 2) демонстрирует, что качество выравнивания действительно ухудшается при повышении степени сжатия, хотя даже эта сниженная точность по-прежнему превосходит другие существующие методы на рассматриваемых объектах. Стоит также отметить, что для степени сжатия 512 метрики незначительно ухудшаются по сравнению со сжатием 256, тем не менее эти различия укладываются в оцененую точность определения истинного базиса изображений. В то же время, можно сделать вывод, что максимальное разрешение не является необходимым для успешной работы предложенного алгоритма, а учитывая повышение потребляемой памяти и времени работы алгоритма рентабельнее может оказаться использование более агрессивных стратегий сжатия.

Наиболее важными свойствами описанного алгоритма являются его робастность и универсальность. Однако в этом разделе мы хотели бы сосредоточиться на преимуществах предлагаемого метода, которые возникают при анализе не отдельного интегрального значения (что характерно для тензорных методов), а всего целевого функционального нелокального углового распределения. Предложенный метод может быть обобщен на задачу нахождения не только одного оптимального базиса, но и произвольного числа локальных оптимумов, соответствующих уникальным анизотропным особенностям объекта, даже существенно менее выраженным. Следует отметить, что это принципиальное отличие предлагаемого алгоритма от других описанных алгоритмов, которые по своей конструкции могут дать только один ответ.

Эта возможность может открыть совершенно новую область применения методов ортотропного выравнивания. Прежде всего, его можно использовать для визуального анализа сложных деталей с произвольной ориентацией внутренних частей, включая печатные платы, размещенные на наклонных поверхностях, и т.д. В этом случае в общей формулировке решения может не существовать – решение, основанное на наивной реализации, может быть найдено между двумя положениями, представляющими реальный интерес. Таким образом, результат применения предлагаемого алгоритма может содержать несколько различных наборов базисных векторов, которые оператор или автомат, принимающий решение, должен перебирать, анализируя различные области интереса.

Другое нетривиальное возможное применение предлагаемого метода заключается в области обнаружения и описания особых точек в задаче совмещения изображений. Одним из нерешенных вопросов для описания особых точек при совмещении 3D-изображений является стандартизация ориентации их окрестностей. Двумя распространенными подходами являются расчет выравнивания на основе тензора градиента, применяемый в реализации SIFT3D [32], и подход основанный на анализе распределения гистограммы градиента в трехмерном пространстве [33]. Основанный на тензоре метод, хотя и является относительно быстрым, имеет ряд

недостатков, в том числе обеспечивает единственную ориентацию и отфильтровывает важные трехмерные угловые точки из-за множества неортогональных особых направлений по соседству, что приводит к очень низкому качеству детектора для задач промышленной КТ. Подход на основе распределения гистограммы градиентов является обобщением хорошо известного двумерного подхода, реализованного в классическом алгоритме SIFT [34]. Тем не менее трехмерный вариант предоставляет еще одну степень свободы, которая противоречит простоте оригинального метода. Одного направления недостаточно для определения ориентации трехмерного объема, и этот метод, уже требующий больших вычислительных затрат, становится узким местом, а также теряет робастность и не имеет достаточного количества статистических данных для семплирования всех направлений на сфере [32]. В связи с этим предлагаемый нами метод представляется идеальным кандидатом для решения задачи стандартизации ориентации особых точек. Предлагаемый метод является робастным и эффективным с точки зрения вычислений, может определять как базис, так и одно направление и способен предоставлять несколько базисных наборов для одной особой точки.

5. ВЫВОДЫ

Ортотропное выравнивание и стандартизация ориентации является важнейшим этапом предварительной обработки для автоматического анализа 3D-изображений. Робастные и полностью автоматические решения этой задачи имеют большую актуальность для промышленной КТ диагностики, неразрушающего контроля и дефектоскопии. В настоящей работе мы предлагаем обобщение современного подхода к стандартизации ориентации 2D-изображений, основанного на БПХ, к задаче ортотропного выравнивания 3D-изображений. В частности, предлагается использовать 3D БПХ для одновременного вычисления сумм по набору дискретных плоскостей в объемном изображении, снижая вычислительную сложность наивного алгоритма с $O(N^5)$ до $O(N^3 \log N)$ операций.

Представлена подробная схема реализации, а также выполнен анализ качества работы алгоритма в сравнении с существующими методами. Численные эксперименты демонстрируют робастность и эффективность предложенного подхода и демонстрируют, что алгоритм обеспечивает стабильное и точное выравнивание во всех изученных случаях. Алгоритм обладает широкими возможностями обобщения и может быть эффективно применен к объектам произвольной формы без ограничений на количество и расположение осей анизотропии.

Представлены потенциальные расширения и применения метода, включая обнаружение множества ортотропных базисов и стандартизацию ориентации особых точек в задаче совмещения 3D изображений. Представленные разработки подчеркивают универсальность и практическую значимость предлагаемой системы выравнивания на основе 3D БПХ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. L. Arlazarov, D. P. Nikolaev, V. V. Arlazarov, and M. V. Chukalina, "X-ray tomography: the way from layer-by-layer radiography to computed tomography," *Computer Optics* **45**(6), 897–906 (2021). DOI: 10.18287/2412-6179-CO-898.
2. G. Katti, S. A. Ara, and A. Shireen, "Magnetic resonance imaging (mri)—a review," *International journal of dental clinics* **3**(1), 65–70 (2011).
3. M.-T. Le, C.-T. Tu, S.-M. Guo, and J.-J. J. Lien, "A pcb alignment system using rst template matching with cuda on embedded gpu board," *Sensors* **20**(9), 2736 (2020).
4. P. Alexander, S. Allen, and D. Dutta, "Part orientation and build cost determination in layered manufacturing," *Computer-Aided Design* **30**(5), 343–356 (1998).
5. B. Ezair, F. Massarwi, and G. Elber, "Orientation analysis of 3d objects toward minimal support volume in 3d-printing," *Computers & Graphics* **51**, 117–124 (2015).

6. A. Avetisyan, M. Dahnert, A. Dai, M. Savva, A. X. Chang, and M. Nießner, “Scan2cad: Learning cad model alignment in rgb-d scans,” in *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on computer vision and pattern recognition*, 2614–2623 (2019).
7. G. Yao, Y. Zou, J. Wang, H. Yu, and T. Chen, “Fully automated registration of 3d ct data to cad model for surface deviation measurement,” *Journal of X-Ray Science and Technology* **27**(6), 1101–1119 (2020).
8. O. A. Bugay, P. A. Kulagin, D. V. Polevoy, M. I. Gilmanov, and D. P. Nikolaev, “Ransac based method for orthotropic alignment of ct images,” *Informatsionnye protsessy* **24**(4), 430–437 (2024). DOI: 10.53921/18195822_2024_24_4_430.
9. D. A. Bocharov, “A linear regression method robust to extreme stationary clutter,” *Sensory systems* **34**(1), 44–56 (2020). DOI:10.31857/S0235009220010059.
10. E. Ershov, A. Terekhin, and D. Nikolaev, “Generalization of the fast hough transform for three-dimensional images,” *Journal of Communications Technology and Electronics* **63**(6), 626–636 (2018).
11. N. Alpert, J. Bradshaw, D. Kennedy, and J. Correia, “The principal axes transformation—a method for image registration,” *Journal of nuclear medicine* **31**(10), 1717–1722 (1990).
12. E. Bobrowitsch, C. Imhauser, H. Graichen, and L. Dürselen, “Evaluation of a 3d object registration method for analysis of humeral kinematics,” *Journal of biomechanics* **40**(3), 511–518 (2007).
13. P. Bleiziffer, J. Hofmann, R. Zboray, T. Wiege, and R. Herger, “Predicting the fiber orientation in glass fiber reinforced polymers using the moment of inertia and convolutional neural networks,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **104**, 104351 (2021). doi: 10.1016/j.engappai.2021.104351.
14. O. A. Bugai, P. A. Kulagin, D. V. Polevoy, and D. P. Nikolaev, “Orthotropic alignment for x-ray computed tomography images,” in *SPRA 2024*, X. Pang, ed., **13540**, 135400E1–135400E7, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE), Bellingham, Washington 98227-0010 USA (Feb. 2025). DOI: 10.1117/12.3056308.
15. S. Garg, D. P. Mohanty, S. P. Thota, and S. Moharana, “A simple approach to image tilt correction with self-attention mobilenet for smartphones,” *arXiv preprint arXiv:2111.00398* (2021).
16. W. Xian, Z. Li, M. Fisher, J. Eisenmann, E. Shechtman, and N. Snavely, “Uprightnet: geometry-aware camera orientation estimation from single images,” in *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, 9974–9983 (2019).
17. P. Fischer, A. Dosovitskiy, and T. Brox, “Image orientation estimation with convolutional networks,” in *German conference on pattern recognition*, 368–378, Springer (2015).
18. M. L. Brady and W. Yong, “Fast parallel discrete approximation algorithms for the radon transform,” in *Proceedings of the fourth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*, 91–99 (1992).
19. A. V. Dolmatova and D. P. Nikolaev, “Fast filtering and back projection for ct image reconstruction,” *Sensory systems* **34**(1), 64–71 (2020). DOI: 10.31857/S0235009220010072.
20. T.-K. Wu and M. L. Brady, “A fast approximation algorithm for 3d image reconstruction,” (1998).
21. L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress, “Practical cone-beam algorithm,” *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 612–619 (Jun 1984).
22. E. I. Ershov, A. P. Terekhin, S. M. Karpenko, D. P. Nikolaev, and V. V. Postnikov, “Fast 3d hough transform computation,” in *ECMS*, 227–230 (2016).
23. D. Kazimirov and D. Nikolaev, “A high-accuracy fast hough transform with linear-log-cubed computational complexity for arbitrary-shaped images,” (2025).
24. D. Kazimirov, D. Nikolaev, E. Rybakova, and A. Terekhin, “Efficient in-place hough transform algorithm for arbitrary image sizes,” *Problems of Information Transmission* **60**(4), 363–391 (2024).
25. D. D. Kazimirov, E. O. Rybakova, V. V. Gulevskiy, A. P. Terekhin, E. E. Limonova, and D. P. Nikolaev, “Generalizing the brady-yong algorithm: Efficient fast hough transform for arbitrary image sizes,” *IEEE Access* **13**, 20101–20132 (2025). DOI: 10.1109/ACCESS.2025.3534405.

26. D. Polevoy, M. Gilmanov, D. Kazimirov, M. Chukalina, A. Ingacheva, P. Kulagin, and D. Nikolaev, "Tomographic reconstruction: General approach to fast back-projection algorithms," *Mathematics* **11**(23), 4759–1–4759–37 (2023). DOI:10.3390/math11234759.
27. ASUS, "Nvidia rtx4060 proart graphic card." <https://grabcad.com/library/asus-nvidia-rtx4060-proart-graphic-card-1>. Accessed: 2025-09-15.
28. M. Shutov, A. Ingacheva, D. Kazimirov, A. Yamaev, M. Gilmanov, A. Buzmakov, M. Chukalina, D. Nikolaev, D. Polevoy, V. Arlazarov, and K. Bulatov, "Smart tomo engine novel tomography reconstruction tool," in *SFR-2022*, 35–37, Tipografiya Alexpress (2022).
29. M. Wu, P. FitzGerald, J. Zhang, W. P. Segars, H. Yu, Y. Xu, and B. De Man, "Xcist—an open access x-ray/ct simulation toolkit," *Physics in Medicine & Biology* **67**(19) (2022). 10.1088/1361-6560/ac9174.
30. P. S. Chikin, Z. V. Soldatova, A. S. Ingacheva, and D. V. Polevoy, "Virtual data generation pipeline for the analysis of computed tomography methods," *Trudy ISA RAN (Proceedings of ISA RAS)* **74**(4), 46–55 (2024). DOI: 10.14357/20790279240406.
31. O. Rodrigues, "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire," *Journal de mathématiques pures et appliquées* **5**, 380–440 (1840).
32. B. Rister, M. A. Horowitz, and D. L. Rubin, "Volumetric image registration from invariant keypoints," *IEEE Transactions on Image Processing* **26**(10), 4900–4910 (2017).
33. S. Allaire, J. J. Kim, S. L. Breen, D. A. Jaffray, and V. Pekar, "Full orientation invariance and improved feature selectivity of 3d sift with application to medical image analysis," in *2008 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, 1–8 (2008).
34. D. G. Lowe, "Distinctive image features from scale-invariant keypoints," *International journal of computer vision* **60**(2), 91–110 (2004).

3D Hough transform-based automatic orthotropic alignment of volumetric images

P. A. Kulagin, D. D. Kazimirov, O. A. Bugai, A. A. Kirkicha, D. P. Nikolaev, M. I. Gilmanov

Orthotropic alignment task is particularly important in industrial computed tomography, where alignment enables standardized orientation of similar objects, facilitating 3D image registration, and CAD-model registration, for precise defect measurement. In this paper, we formalize the tasks of orthotropic alignment and orientation standardization and propose a robust, efficient, reproducible and fully automatic approach based on fast 3D Hough transform calculation for aligning various volumetric images. We provide the implementation, evaluation, and assessment of the algorithm on both real and synthetic CT data. It is demonstrated that the proposed method is superior to baseline methods in terms of both accuracy and stability, while having better generosity. Potential applications in related fields are also discussed.

KEYWORDS: computed tomography (CT), volume orientation standardization, orthotropic alignment, Hough transform (HT), fast Hough transform (FHT).