

# Нелинейный фильтр процесса с коррелированной производной при неизвестной интенсивности шума в наблюдениях<sup>1</sup>

Н. А. Кузнецов<sup>\*,a</sup>, М. В. Лебедев<sup>\*\*\*,b</sup>, К. В. Семенихин<sup>\*\*\*,c</sup>

<sup>\*</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия,

<sup>\*\*</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Долгопрудный, Московская область, Россия,

<sup>\*\*\*</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия

e-mail: <sup>a</sup>kuznetsov@cplire.ru, <sup>b</sup>max\_max82@inbox.ru, <sup>c</sup>siemenkv@gmail.com

Поступила в редколлегию 28.10.2025 г. Принята 28.10.2025 г.

**Аннотация**—В работе построен нелинейный фильтр для оценивания состояний процесса с коррелированной старшей производной по наблюдениям, содержащим гауссовский белый шум неизвестной интенсивности. Фильтр содержит нелинейное звено, которое является аппроксимацией линейного преобразования обновляющего процесса в фильтре Калмана—Бьюси при произвольном выборе интенсивности помех. Вектор оценок определяется дифференциальной системой того же порядка, что и вектор состояния без использования уравнений на ковариационную матрицу ошибки. По результатам численного эксперимента даны рекомендации по выбору настроечного параметра нелинейного фильтра для учета корреляции в модели сигнала.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** нелинейная фильтрация, неизвестная интенсивность шума, линейная стохастическая дифференциальная система, фильтр Калмана—Бьюси.

DOI: 10.53921/18195822\_2025\_25\_3.1\_648

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Фильтр Калмана и его непрерывный аналог фильтр Калмана—Бьюси [1] до сих пор остаются теоретической основой многих алгоритмов динамического оценивания параметров и процессов по наблюдениям, содержащим случайные ошибки. Это можно проследить по монографиям, опубликованным за последние два десятилетия в области нелинейной стохастической фильтрации [2, 3, 4, 5, 6].

В [7] проведено сравнение и выделены особенности структуры квазилинейных алгоритмов калмановской фильтрации, основанных на гауссовской аппроксимации апостериорного распределения и оптимизации линейного преобразования обновляющего процесса: расширенный фильтр Калмана, полиномиальные фильтры второго и третьего порядков, сигма-точечный и кубатурные фильтры.

В [8] использована теория условно-минимаксного нелинейного фильтра [9], который наследует рекуррентную структуру фильтра Калмана с возможностью выбора функций прогноза и коррекции с учетом настройки коэффициентов на основе робастных методов регрессии.

<sup>1</sup> Работа выполнена по государственному заданию: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (FFWZ-2025-0015).

Для решения задач оценивания и фильтрации в моделях с неопределенными интенсивностями шумов (в непрерывном случае) или неизвестными ковариационными матрицами (в дискретном случае) традиционно используют минимаксные методы, которые нацелены на выбор оптимального оценивателя при наихудшем сочетании неопределенных характеристик [10, 11, 12].

Другой подход состоит в построении адаптивных схем фильтрации, в которых неопределенные параметры оцениваются параллельно с вычислением оценки вектора состояния системы. В [13] используется метод рекуррентной байесовской фильтрации, при которой неизвестные дисперсии шумов трактуются как случайные процессы и для них параллельно оценивается апостериорная плотность. В [14] построен адаптивный несмещенный фильтр конечной памяти, использующий байесовский метод оценивания неизвестной ковариационной матрицы на основе модели обратного распределения Уишарта. В [15] выведены приближенные схемы фильтрации для линейно-гауссовской системы большой размерности, в том числе в случае неизвестной ковариационной матрицы помех.

Ясно, что оба подхода (минимаксный и адаптивный) имеют свои ограничения: минимаксные оценки зачастую оказываются избыточно перестраховочными, а адаптивные алгоритмы — весьма затратными с вычислительной точки зрения. Поэтому в настоящей работе применяется метод нелинейной фильтрации, который можно рассматривать как альтернативу обоим указанным выше подходам. Этот метод первоначально был предложен в [16], а затем развит в [17] для фильтрации сигнала с белым шумом старшей производной по наблюдениям, имеющим неизвестную интенсивность шумов. Там он назван методом обратной статистической линеаризации, поскольку основан на нелинейном преобразовании, результат применения которого к обновляющему процессу имеет те же моментные характеристики, что и в фильтре Калмана—Бьюси. Поэтому рассматриваемый нелинейный фильтр описывается дифференциальной системой того же порядка, что и вектор состояния, не использует уравнений Риккати для определения ковариационной матрицы ошибки и не зависит от значения неизвестной интенсивности белого шума в наблюдениях.

В данной статье алгоритм нелинейной фильтрации, основанный на методе обратной статистической линеаризации, применяется к оцениванию сигнала с коррелированной производной. Для соответствующего фильтра требуется выяснить: насколько он чувствителен к увеличению корреляции в модели сигнала, будет ли он устойчив к вариации интенсивности помех, и можно ли повысить его точность за счет настройки коэффициентов фильтра.

Статья организована следующим образом: раздел 2 содержит описание рассматриваемой модели и постановку изучаемой задачи; раздел 3 дает явный вид предлагаемого алгоритма фильтрации; раздел 4 представляет результаты численного эксперимента с их анализом с точки зрения достижения сформулированной цели исследования; раздел 5 подводит краткий итог полученным результатам.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим вещественный случайный процесс  $\varkappa(t)$ , у которого производная  $\varkappa^{(q)}(t)$  порядка  $q \geq 1$  является стационарным процессом и подчиняется уравнению Орнштейна—Уленбека [18]:

$$\dot{\varkappa}^{(q)}(t) = -\alpha \varkappa^{(q)}(t) + \beta v(t), \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta$  — известные положительные параметры, а  $v(t)$  — стандартный гауссовский белый шум.

Векторный процесс

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varkappa \\ \dot{\varkappa} \\ \dots \\ \varkappa^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (m = q + 1) \quad (2)$$

будем называть *состоянием*.

Вектор состояния подлжит оцениванию по текущим наблюдениям за процессом  $\varkappa(t)$  с учетом аддитивной помехи  $\sigma\varepsilon(t)$ , в которой  $\varepsilon(t)$  представляет собой стандартный гауссовский белый шум, не зависящий от возмущения  $v(t)$ , а интенсивность помехи  $\sigma > 0$  является неизвестным параметром. Данное предположение представим в виде уравнения

$$\dot{Y}(t) = \varkappa(t) + \sigma\varepsilon(t) \quad (3)$$

относительно случайного процесса  $Y(t)$ , называемого далее *наблюдаемым процессом*.

Таким образом, вектор состояния и наблюдаемый процесс описываются системой линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{X}_i = X_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

$$\dot{X}_m = -\alpha X_m + \beta v(t), \quad (5)$$

$$\dot{Y} = X_1 + \sigma\varepsilon(t). \quad (6)$$

Если исходить из гипотезы, что старшая производная оцениваемого процесса  $\varkappa^{(m)}$  представляет собой белый шум интенсивности  $\nu^2$ , т.е. справедливо уравнение

$$\dot{X}_m = \nu v(t), \quad (7)$$

то оценка  $\hat{X}^0(t) = M\{X(t) | Y(s), s < t\}$  определяется стационарным фильтром Калмана—Бьюси, который имеет аналитический вид [19]:

$$\dot{\hat{X}}_i^0 = \hat{X}_{i+1}^0 + G_{i,1}(\nu/\sigma)^{i/m} \delta(t), \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (8)$$

$$\dot{\hat{X}}_m^0 = G_{m,1}(\nu/\sigma) \delta(t), \quad \delta(t) = \dot{Y}(t) - \hat{X}_1^0(t). \quad (9)$$

Здесь  $G = \{G_{i,j}\}$  — это симметричная матрица, зависящая только от своего размера  $m$  и образующая единственное положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$A^0 G + G(A^0)^T + E E^T - G C^T C G = O, \quad (10)$$

в котором матрицы  $A^0, E, C$  имеют вид

$$A^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (11)$$

Кроме того, обновляющий процесс  $\delta(t)$  образует гауссовский белый шум интенсивности  $\sigma^2$ .

Для такой модели (т.е. для системы (4)–(6) при  $\alpha = 0$  и  $\beta = \nu$ ) в [17] построен нелинейный фильтр, который основан на сохранении моментных характеристик при преобразовании обновляющего процесса при произвольной интенсивности помех:

$$\dot{\check{X}}_i = \check{X}_{i+1} + G_{i,1} \gamma_{2(1-i/m)}^{-1/2} \nu^{i/m} \text{sign}(\delta(t)) |\delta(t)|^{1-i/m} \quad (12)$$

$$\dot{\check{X}}_m = G_{m,1} \nu \text{sign}(\delta(t)), \quad \text{при } i = 1, \dots, m-1, \quad (13)$$

где  $\delta(t) = \dot{Y}(t) - \dot{X}_1(t)$  — соответствующий обновляющего процесс, а  $\gamma_p$  — абсолютный момент порядка  $p$  стандартной нормальной величины  $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , т.е.

$$\gamma_p = \mathbb{M}(|U|^p) = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Структурная схема фильтра  $\check{X}$  приведена на рис. 1. Она содержит  $m$  нелинейных звеньев, отвечающих за преобразование обновляющего процесса. Каждое из этих звеньев определяется нечетной монотонно неубывающей функцией не более чем линейного роста.

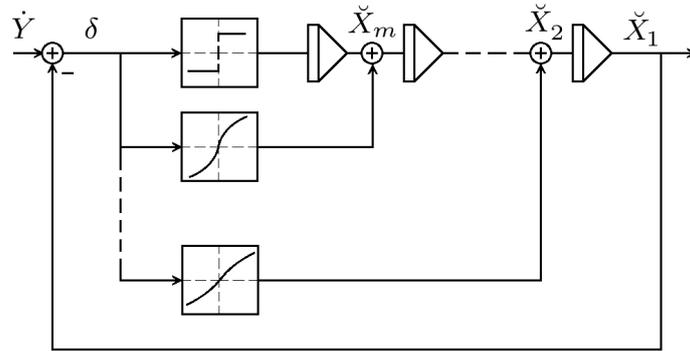


Рис. 1. Структурная схема нелинейного фильтра (12), (13).

Важнейшим свойством данного фильтра является то, что он не зависит ни от интенсивности шума  $\sigma^2$ , ни от параметров оцениваемого сигнала  $\alpha, \beta$ , а определяется только параметром  $\nu$ , который можно рассматривать как настроечный коэффициент. В том случае, если эта зависимость понадобится для установления свойств фильтра (12), (13), наряду с уже введенным обозначением будем использовать также запись  $\check{X}^{[\nu]}$ .

Согласно результатам [17] фильтр  $\check{X}^{[\nu]}$ , будучи применен к оцениванию состояния системы (4), (7), имеет характеристики точности, близкие к тому, что получается для фильтра Калмана—Бьюси, т.е. оптимального фильтра (8), (9). Поэтому возникает идея применить данный нелинейный фильтр к более широкому классу систем.

Таким образом, цель данной работы — описать границы применимости нелинейного фильтра  $\check{X}^{[\nu]}$  к оцениванию состояния системы (4), (5), описывающей сигнал с коррелированной старшей производной, по наблюдениям (6) самого сигнала с аддитивной белозумной помехой неизвестной интенсивности. Для достижения этой цели требуется выработать рекомендации по выбору настроечного коэффициента  $\nu$  на основе сравнения точности оценивания с тем, что дает оптимальный фильтр, при разных параметрах модели сигнала и шума, т.е.  $\alpha, \beta$  и  $\sigma$ .

### 3. АЛГОРИТМ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Если использовать матричные обозначения (11), то систему (4)–(6) можно записать в векторном виде

$$\dot{X} = A^0 X + E \xi(t), \quad \dot{Y} = C X + \sigma \varepsilon(t), \tag{14}$$

где возмущение

$$\xi(t) = \dot{X}_m(t) = -\alpha X_m(t) + \beta v(t) \tag{15}$$

представляет собой стационарный процесс.

Аналогично этому нелинейный фильтр  $\check{X}$  описывается дифференциальной системой

$$\dot{\check{X}} = A^0 \check{X} + \varphi(\dot{Y} - C\check{X}), \quad (16)$$

в котором вектор-функция  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  выбрана из условия соответствия моментных характеристик преобразованного обновляющего процесса в фильтре Калмана—Бьюси (более подробно см. в [17]). Ее компоненты имеют вид

$$\varphi_i(x) = G_{i,1} \gamma_{2(1-i/m)}^{-1/2} \nu^{i/m} \text{sign}(x) |x|^{1-i/m}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

На временной сетке  $\{t_k\}$  с шагом  $h$  разностная схема реализации нелинейного фильтра (16) имеет вид

$$\check{X}(t_{k+1}) = [I + hA_0] \check{X}(t_k) + \sqrt{h} \varphi \left( \frac{Y(t_{k+1}) - Y(t_k)}{\sqrt{h}} - \sqrt{h} C \check{X}(t_k) \right). \quad (18)$$

Данный фильтр был изначально построен для модели (14), в которой процесс  $\xi(t)$  предполагался белым шумом интенсивности  $\nu^2$ . Однако модель, изучаемая в настоящей работе, основана на другом уравнении (15), т.е. предложении о том, что процесс  $\xi(t)$  является производной стационарного процесса Орнштейна—Уленбека  $X_m(t)$ .

Поэтому предлагается выбрать настроечный параметр  $\nu$  из сравнения среднеквадратичных ошибок нелинейного фильтра  $\check{X}^{[\nu]}$  и оптимального фильтра, т.е. фильтра Калмана—Бьюси  $\hat{X}$ , примененного к истинной модели

$$\dot{X} = AX + \beta Ev(t), \quad \dot{Y} = CX + \sigma \varepsilon(t), \quad (19)$$

в которой матрица системы явно зависит от параметра  $\alpha$ :

$$A = A^0 - \alpha EE^T. \quad (20)$$

Тогда уравнение оптимального фильтра принимает вид

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + \sigma^{-2} \Delta C^T [\dot{Y} - C\hat{X}], \quad (21)$$

в котором ковариационная матрица ошибки фильтрации (в установившемся режиме)

$$\Delta = \text{cov}\{\hat{X}(t) - X(t)\} \quad (22)$$

удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати

$$A\Delta + \Delta A^T + \beta^2 EE^T - \sigma^{-2} \Delta C^T C \Delta = O. \quad (23)$$

Его решение в классе положительно определенных матриц существует и единственно в силу свойств наблюдаемости и управляемости, выполненных для матричных пар  $(A, C)$  и  $(A, E)$ , соответственно, [20].

Далее будет использоваться параметр  $r_{\min}$ , который определяет скорость перехода оптимального фильтра к стационарному режиму: он задается, как расстояние спектра матрицы замкнутого контура фильтрации (21) до мнимой оси, т.е.

$$r_{\min} = \min\{-\text{Re } \lambda_i : i = 1, \dots, m\}, \quad (24)$$

где  $\{\lambda_i\}$  — набор собственных значений матрицы  $A - \sigma^{-2} \Delta C^T C$ .

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим систему (4)–(6) порядка  $m = 3$ . Тогда координаты  $X_1, X_2, X_3$  вектора состояния можно интерпретировать как положение движущегося объекта (вдоль выбранного направления), его скорость и ускорение, соответственно. Для моделирования вектора состояния  $X(t) \in \mathbb{R}^3$  и наблюдаемого выхода  $Y(t) \in \mathbb{R}$  возьмем фиксированное значение дисперсии стационарного процесса, описывающего ускорение

$$DX_3 = \beta^2 / (2\alpha) = w^2, \quad w = 3, \tag{25}$$

а также несколько значений параметра  $\alpha$  апериодического звена (1)

$$\alpha = 1/25, 1/5, 1, 5, 25 \tag{26}$$

вместе с соответствующими значениями параметра возмущения  $\beta = w\sqrt{2\alpha}$ .

Значение параметра, определяющего интенсивность помех  $\sigma^2$ , будет варьироваться в следующем диапазоне:

$$\sigma = 2, 20, 200. \tag{27}$$

Настроечный параметр нелинейного фильтра  $\check{X}^{[\nu]}$  пробегает следующий набор значений

$$\nu = 2^\ell \beta, \quad \ell = -8, \dots, 2. \tag{28}$$

Чтобы задать среднеквадратичные ошибки (в исходной шкале)

$$s_i = \sqrt{M\{(\hat{X}_i - X_i)^2\}}, \quad \check{s}_i^{[\nu]} = \sqrt{M\{(\check{X}_i^{[\nu]} - X_i)^2\}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{29}$$

для оптимального  $\hat{X}$  и нелинейного фильтров  $\check{X}^{[\nu]}$  будем использовать априорное вычисление ковариационной матрицы ошибки (22) и результат усреднения вдоль одной траектории

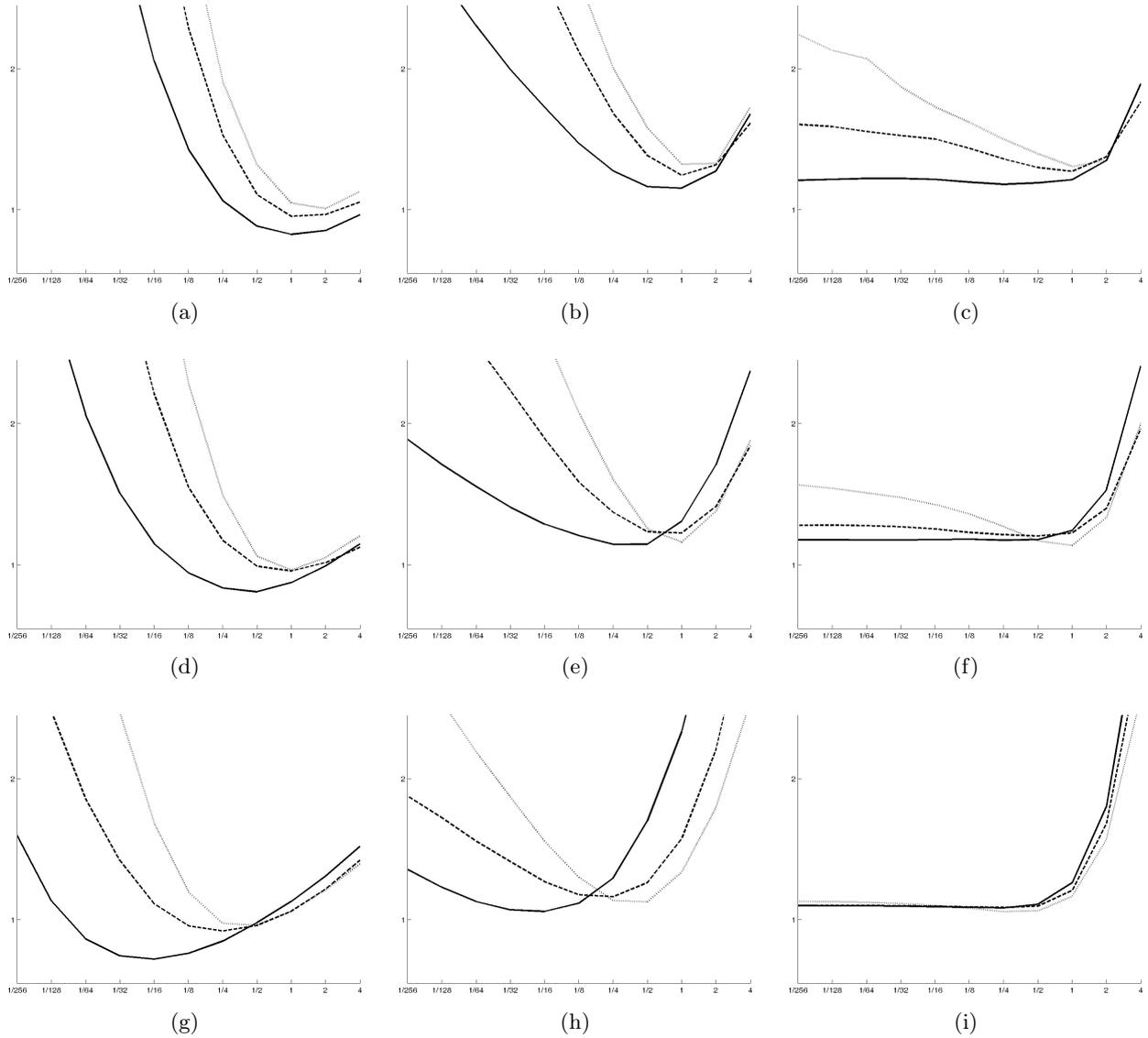
$$s_i = \sqrt{\Delta_{i,i}} \quad \text{и} \quad \check{s}_i^{[\nu]} \approx \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \check{X}_i^{[\nu]}(t_k) - X_i(t_k) \right)^2 \right\}^{1/2} \tag{30}$$

с учетом того, что  $N$  выбрано так, чтобы  $T = t_N$  было на порядок больше, чем значение, обратное к параметру  $r_{\min}$  из (24).

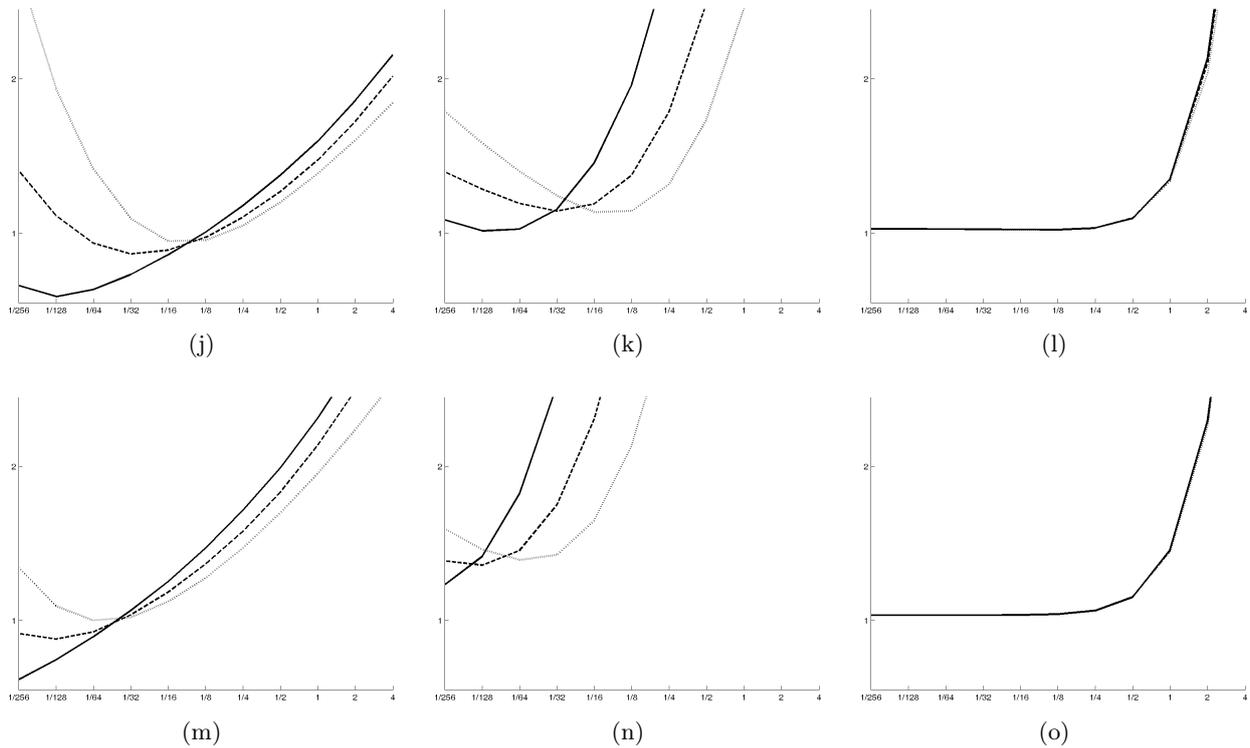
На каждом графике рис. 2 показано то, насколько среднеквадратичная ошибка нелинейного фильтра оказывается завышенной по сравнению с оптимальным фильтром в зависимости от выбора настроечного параметра  $\nu$  для трех вариантов интенсивности помех: малым помехам соответствует пунктирная линия, промежуточному варианту — штриховая и случаю сильных помех — сплошная. Левые графики соответствуют оценкам положения  $X_1$ , средние — скорости  $X_2$  и правые — ускорению  $X_3$ . При переходе от верхних графиков к нижним параметр апериодического звена  $\alpha$  принимает значения от наименьшего к наибольшему из рассматриваемого диапазона (26).

На основании данных проведенного эксперимента можно сделать следующие выводы.

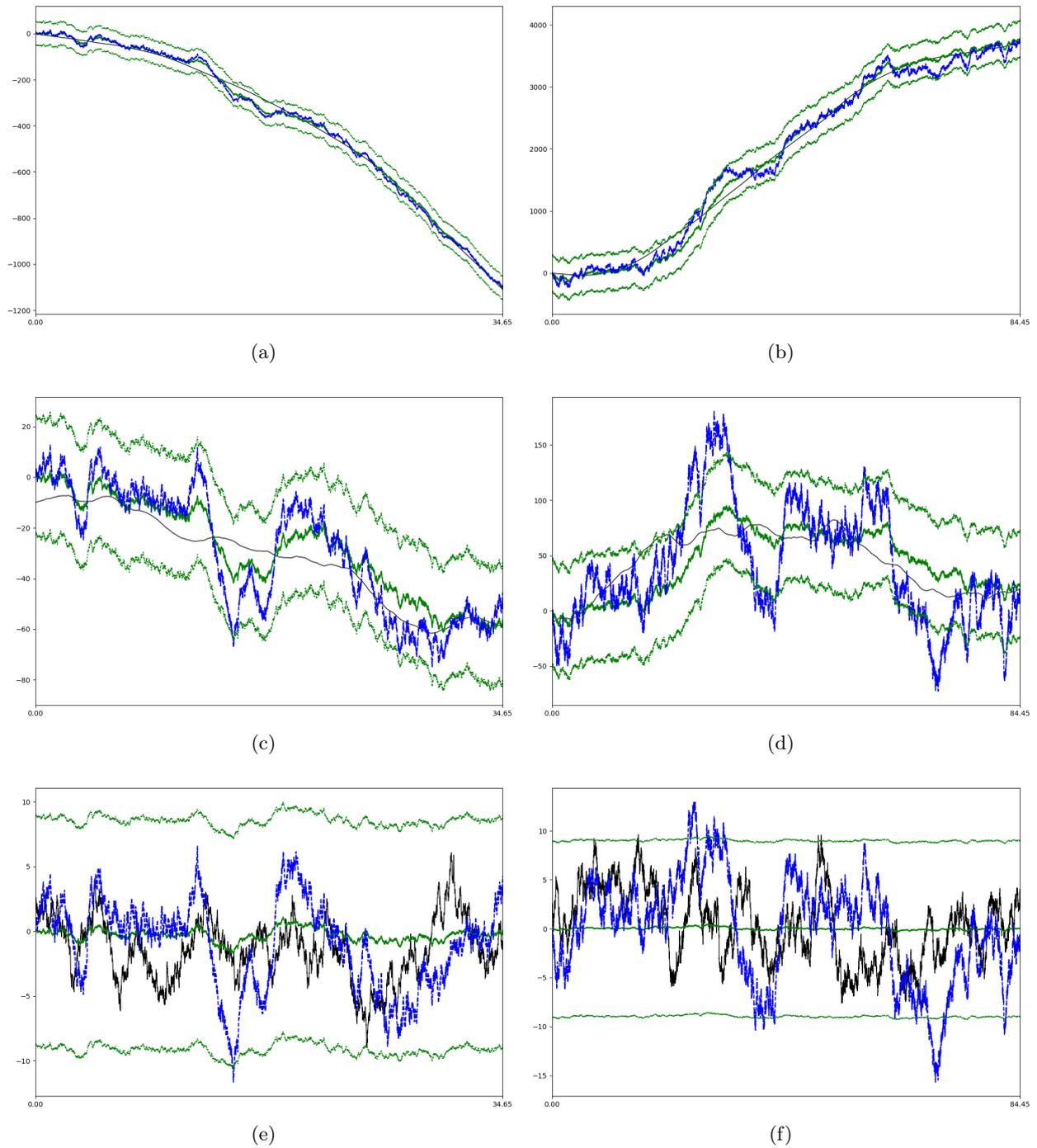
При малых значениях  $\alpha$ , когда старшая производная сигнала описывается мало коррелированным процессом, близким к белому шуму, значение параметра нелинейного фильтра следует выбирать близким к коэффициенту диффузии:  $\nu \approx \beta$ . Это подтверждает теоретические результаты, полученные в [17] о точности нелинейного фильтра, построенного в модели сигнала со старшей производной в виде белого шума.



**Рис. 2.** Отношение среднеквадратичных ошибок  $\hat{s}_i^{[\nu]}/s_i$  при разных значениях настроечного параметра  $\nu$  (по горизонтали даны значения  $\nu/\beta$ ) для трех вариантов интенсивности помех (пунктирная при  $\sigma = 2$ , штриховая при  $\sigma = 20$ , сплошная при  $\sigma = 200$ ), для трех координат ( $i = 1$  — слева,  $i = 2$  — посередине,  $i = 3$  — справа) и нескольких значений параметра  $\alpha = 0.04, 0.2, 1, 5, 25$  (сверху вниз).



**Рис. 2.** Отношение среднеквадратичных ошибок  $s_i^{[\nu]}/s_i$  при разных значениях настроечного параметра  $\nu$  (по горизонтали даны значения  $\nu/\beta$ ) для трех вариантов интенсивности помех (пунктирная при  $\sigma = 2$ , штриховая при  $\sigma = 20$ , сплошная при  $\sigma = 200$ ), для трех координат ( $i = 1$  — слева,  $i = 2$  — посередине,  $i = 3$  — справа) и нескольких значений параметра  $\alpha = 0.04, 0.2, 1, 5, 25$  (сверху вниз).



**Рис. 3.** Траектория состояния  $X_i$  (черная сплошная), их оптимальная оценка  $\hat{X}_i$  (зеленая сплошная), оценка нелинейного фильтра  $\check{X}_i^{[\nu]}$  (синяя сплошная) и доверительная трубка  $\hat{X}_i \pm 3s_i$  (зеленая пунктирная) для случая малой и большой интенсивности помех ( $\sigma = 20$  — слева и  $\sigma = 200$  — справа) и трех координат ( $i = 1$  — сверху,  $i = 2$  — посередине,  $i = 3$  — снизу).

Нелинейный фильтр с параметром  $\nu = \beta$  остается работоспособным даже при  $\alpha = 1$ . Однако при дальнейшем увеличении коэффициента обратной связи  $\alpha$  корреляция в модели сигнала становится все более значимой. Это требует существенного уменьшения коэффициента  $\nu$ , определяющего вес нелинейно преобразованного обновляющего процесса в уравнениях фильтра  $\check{X}^{[\nu]}$ .

Представленные числовые данные позволяют дать следующие рекомендации по выбору настроечного параметра нелинейного фильтра:

$$\frac{\alpha}{\nu/\beta} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 0.04 & 0.2 & 1 & 5 & 25 \\ \hline 1 & 0.7 & 0.2 & 0.03 & 0.01 \end{array} \right. \quad (31)$$

На рис. 3 приведены траектории положения  $X_1(t)$  (верхние графики), скорости  $X_2(t)$  (графики посередине), ускорения  $X_3(t)$  (нижние графики), их оптимальные оценки  $\{\hat{X}_i(t)\}$ , оценки  $\{\check{X}_i^{[\nu]}(t)\}$ , построенные с помощью нелинейного фильтра (12), (13), а также доверительные границы вида  $\{\hat{X}_i(t) \pm 3s_i\}$  для фиксированных значений параметров модели, нелинейного фильтра и двух вариантов интенсивности помех

$$\alpha = 0.5, \quad \nu = \beta = 3, \quad \sigma = 20 \quad \text{и} \quad \sigma = 200. \quad (32)$$

Графики приводятся на интервале  $T = 10/r_{\min}$ .

Как видно из графиков рис. 3 нелинейный фильтр  $\check{X}^{[\nu]}$  при  $\nu = \beta$ , хотя и проигрывает по точности оптимальному фильтру, но остается работоспособным даже при большой интенсивности помех.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нелинейный фильтр, разработанный в [17] для оценивания сигнала с белозумной производной при неизвестной интенсивности помех, применен к более общей модели, в которой оцениваемый процесс имеет коррелированную старшую производную.

По результатам численного эксперимента, проведенного для системы третьего порядка, даны рекомендации по настройке веса преобразованного обновляющего процесса в уравнениях нелинейного фильтра. Для соответствующего настроечного коэффициента установлены значения, дающие близкую к оптимальному фильтру точность оценивания вектора состояния с учетом вариации ошибок наблюдений на два порядка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // *ASME Transactions, Part D (J. of Basic Engng)*, 1961, vol. 83, pp. 95–108.
2. Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T. *Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms, and software*. New York: J. Wiley & Sons, 2001.
3. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. *Hidden Markov models. Estimation and control*. New York: Springer, 2008.
4. Синицын И.Н. *Фильтры Калмана и Пугачёва*. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Логос, 2007.
5. Raol J.R., Gopalratnam G., Twala B. *Nonlinear Filtering: Concepts and Engineering Applications*. CRC Press, 2017.
6. Yau S.S.-T., Chen X., Jiao X., Kang J., Sun Z., Tao Y. *Principles of Nonlinear Filtering Theory*. Springer Nature, 2024.

7. Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Исаев А.М. Сравнительный анализ квазилинейных алгоритмов калмановского типа в задаче оценивания марковской последовательности при нелинейностях в формирующем фильтре и уравнениях измерений. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2024, том 25, № 11, стр. 585–595.
8. Borisov A., Bosov A., Miller B., Miller G. Passive underwater target tracking: Conditionally minimax nonlinear filtering with bearing-Doppler observations. *Sensors*, 2020, vol. 20, no. 8.
9. Pankov A.R., Bosov A.V. Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1994, vol. 39, no. 8, pp. 1617–1620.
10. Адыйуллина Е. С., Ананьев Б. И. Линейное оценивание статистически неопределенных систем. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 2005, том 11, № 1, стр. 3–16.
11. Лебедев М. В., Семенихин К. В. Минимаксная фильтрация в стохастической дифференциальной системе с нестационарными возмущениями неизвестной интенсивности. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2007, № 2, стр. 45–56.
12. Kogan M. M. LMI-based minimax estimation and filtering under unknown covariances. *Internat. J. Control*, 2014, vol. 87, no. 6, pp. 1216–1226.
13. Cao L., Zhang C., Zhao Z., Wang D., Du K., Fu C., Gu J. An overdispersed black-box variational Bayesian-Kalman filter with inaccurate noise second-order statistics. *Sensors*, 2021, vol. 21, no. 22.
14. Zhao S., Shmaliy Y.S., Ahn C.K., Liu F. Self-tuning unbiased finite impulse response filtering algorithm for processes with unknown measurement noise covariance. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 2021, vol. 29, no. 3, pp. 1372–1379.
15. Ait-El-Fquih B., Hoteit I. Parallel- and cyclic-iterative variational Bayes for fast Kalman filtering in large-dimensions. *IEEE Trans. Signal Process*, 2022, vol. 70, pp. 5871–5884.
16. Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А. Квазиоптимальная фильтрация при неизвестной интенсивности шума в наблюдениях. *Доклады II-го Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления*. М: Наука, 1970, стр. 112–118.
17. Кузнецов Н.А., Семенихин К.В. Метод нелинейной фильтрации при неизвестной интенсивности шума в наблюдениях. *Информатика и автоматизация (Труды СПИИРАН)*, 2025, том 24, № 6 (В печати).
18. Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 2003.
19. Калачев М.Г. Один метод многократного дифференцирования сигнала в системах автоматического регулирования. *Автоматика и телемеханика*, 1970, № 6, стр. 29–36.
20. Liptser R.S., Shirayev A.N. *Statistics of random processes. 3rd ed.* New York: Springer, 2005.

## Nonlinear filter of a process with correlated derivative in the presence of unknown noise intensity

N. A. Kuznetsov, M. V. Lebedev, K. V. Semenikhin

The paper presents a nonlinear filter for state estimation of a process with correlated highest-order derivative from the observations corrupted by the Gaussian white noise of unknown intensity. The filtering scheme is based on nonlinear transformation of the innovation process to approximate the Kalman—Bucy gain matrix, given arbitrary noise intensity. The filter is defined by the differential system of the same dimension as the state vector avoiding equations on the error covariation matrix. Based on the results of computer simulations, recommendations are given for selecting the tuning parameter of the nonlinear filter to take into account the correlation in the signal model.

**KEYWORDS:** nonlinear filtering, unknown noise intensity, linear stochastic differential system, Kalman—Bucy filter.