

Моделирование надежности привязного мультикоптера как восстанавливаемой циклической последовательной системы k -из- n

Н. М. Иванова*

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегия 11.09.2026 Принята 24.09.2026 г.

Аннотация—В работе представлена математическая модель для анализа надежности привязного беспилотного летательного аппарата, структурная схема отказов двигателей которого описывается циклической последовательной системой k -из- n : F ($Cir/Con/k/n$: F). Особенностью модели является учет отказов соседних двигателей: отказ мультикоптера наступает при возникновении кластера из k последовательно отказавших двигателей. Для описания времени восстановления используется произвольное распределение. С помощью метода введения дополнительных переменных строится двумерный марковский процесс, на основе которого выводятся интегро-дифференциальные уравнения Колмогорова. Решение системы позволяет вычислить функцию надежности и среднее время до отказа системы. Практическая апробация модели выполнена на примере гексакоптера, проведен анализ чувствительности показателей надежности к форме распределения времени восстановления. Полученные результаты демонстрируют, что сокращение времени охлаждения существенно повышает надежность системы, а в условиях высокой готовности компонентов показатели слабо чувствительны к форме распределения времени восстановления. Разработанная модель является инструментом для проектирования отказоустойчивых систем и планирования технического обслуживания привязных БПЛА.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: циклическая последовательная система k -из- n , $Cir/Con/k/n$, надежность, произвольно распределенное время восстановления, метод дополнительных переменных, функция надежности, среднее время до отказа, чувствительность

DOI: 10.53921/18195822_2026_26_2.2_682

1. ВВЕДЕНИЕ И МОТИВАЦИЯ

В последние годы наблюдается стремительное развитие беспилотных авиационных систем, которые находят все более широкое применение как в гражданских, так и в оборонных сферах. Особое место среди них занимают привязные беспилотные летательные аппараты (БПЛА) — многороторные платформы, получающие электропитание и передающие данные по кабелю с наземной станции. Такие системы активно используются для обеспечения связи, мониторинга, ретрансляции сигналов и выполнения других задач, требующих длительного непрерывного нахождения в воздухе на фиксированной высоте [1, 2]. Ключевым требованием к подобным платформам является высокая надежность и отказоустойчивость, поскольку их выход из строя в процессе выполнения миссии может привести к серьезным последствиям.

Одной из наиболее распространенных причин отказа многороторных БПЛА является выход из строя двигателей. Для мультикоптерных платформ критическим сценарием является отказ двух соседних двигателей: в этом случае теряется управляемость аппарата, возникает неконтролируемый крен, и платформа становится неспособной к дальнейшему полету. Таким

образом, отказ системы наступает при возникновении кластера из двух или более последовательно (по кругу) отказавших двигателей. Данная структурная особенность естественным образом приводит к моделированию в терминах циклической последовательной системы k -из- n [3], где n – общее число двигателей, а k – минимальное число соседних отказавших двигателей, приводящее к отказу всей платформы. Такие системы обозначаются как $Cir/Con/k/n : F$ или $Cir/Con/k/n : G$ в зависимости от определения отказа системы.

Среди обширного арсенала математических моделей надежности системы k -из- n занимают видное место [4]. Эти модели служат фундаментальным и универсальным инструментом для описания широкого класса реальных технических систем, в том числе телекоммуникационных сетей, энергетических систем и нефтегазового оборудования.

Значительная часть ранних исследований по этой тематике была сосредоточена на системах с независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.) компонентами, решая задачи комбинаторного анализа и структурной оптимизации. Эти работы, безусловно, важны для понимания фундаментальных свойств таких систем. Однако при переходе к моделированию реальных объектов, таких как привязные высотные платформы, возникает необходимость учета динамики восстановления отказавших элементов. В большинстве прикладных моделей предполагалось экспоненциальное распределение как времени безотказной работы (в.б.р.), так и времени восстановления компонентов [5], что является существенным упрощением и может приводить к заметным погрешностям при оценке надежности реальных систем.

Это ограничение стимулировало развитие более общих подходов, в частности, вводящих общее (неэкспоненциальное) распределение времени восстановления при сохранении экспоненциального предположения для в.б.р. компонентов. В ряде работ, например [6,7], рассматриваются системы k -из- n с временами восстановления фазового типа. Впоследствии были предложены методы, основанные на полумарковских моделях [8] и разложимых полурегенерирующих процессах [9], позволяющие с большей точностью вычислять как зависящие от времени, так и стационарные показатели эффективности (коэффициент готовности, надежность, среднее время до отказа). Важным практическим расширением этих идей является разработка оптимальных политик замены и технического обслуживания для таких систем, учитывающих затраты и ограничения миссии [10].

Тем временем исследования в области анализа структур $Cir/Con/k/n : F$ также продолжались. Исследования велись по двум основным направлениям: разработка точных комбинаторных алгоритмов [11] и моделирование восстанавливаемых систем. Однако в последнем случае предположение об экспоненциальном времени восстановления по-прежнему часто доминировало, позволяя строить марковские модели с дополнительными переменными [12] и разрабатывать стратегии технического обслуживания [13]. В работе [14] авторы исследуют политику приоритетного восстановления для системы $Cir/Con/2/6 : F$ с общим распределением времени восстановления. Однако анализ в конечном итоге сводится к численному обращению преобразования Лапласа (ПЛ) для конкретных значений параметров и не предоставляет общего алгоритма.

Таким образом, существующие исследования демонстрируют последовательное продвижение к учету неэкспоненциальных времен восстановления и структурной сложности. Однако применительно к моделированию надежности привязных БПЛА с циклической последовательной структурой отказов двигателей сохраняется существенный пробел: отсутствует алгоритмическое решение для эффективного вычисления функции надежности $R(t)$ и среднего времени до отказа (MTTF) для произвольного распределения времени восстановления.

Настоящая работа посвящена восполнению этого пробела применительно к задаче моделирования надежности привязного БПЛА. Предлагается математическая модель для системы $Cir/Con/k/n : F$ с экспоненциально распределенным в.б.р. компонентов (двигателей) и произ-

вольно распределенным временем восстановления, предполагающая наличие одного ремонтного устройства, восстанавливающего отказавшие двигатели в порядке очереди. Для ее анализа строится двумерный марковский процесс с дискретно-непрерывными компонентами, позволяющий учесть немарковский характер процесса восстановления. На основе этого процесса с использованием метода введения дополнительных переменных и ПЛ выводятся интегральные уравнения для функции надежности.

Практическая значимость работы демонстрируется на примере гексакоптера как типичного представителя привязных БПЛА. Проводится анализ зависимости показателей надежности от параметров отказов и восстановления двигателей, а также анализ чувствительности к форме распределения времени восстановления. Полученные результаты предоставляют инженерам количественные оценки для проектирования отказоустойчивых систем управления и планирования технического обслуживания.

Структура статьи следующая. Раздел 2 содержит описание рассматриваемой системы, формулировку основных предположений, вводит необходимые обозначения и представляет постановку задачи. Раздел 3 посвящен построению математической модели в виде двумерного марковского процесса. В нем выводятся система интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова для определения характеристик надежности системы $Cir/Con/k/n : F$. Раздел 4 предлагает практическое применение модели для оценки надежности привязного БПЛА на основе гексакоптера, представляет вычисленные характеристики и проводит анализ чувствительности. В заключении приведены основные результаты исследования и намечены перспективные направления для последующих исследований.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

В данной работе исследуется модель восстанавливаемой системы горячего резервирования k -из- n ($k < n$) с экспоненциальным распределением в.б.р. и произвольным распределением времени восстановления компонентов. Отказ системы вызывается отказом любых k последовательных компонентов. То есть, если компоненты системы пронумерованы от первого до последнего, отказавшие компоненты должны быть соседними, чтобы привести к отказу системы.

Для упрощения исходной постановки задачи предполагается наличие лишь одного ремонтного устройства. Восстановление отказавших компонентов подчиняется дисциплине “первым пришел — первым обслужен” (FCFS), что означает, что компонент, отказавший первым, восстанавливается первым. В дальнейшем это упрощение может быть опущено для получения более общих аналитических результатов.

Для изучения характеристик надежности системы необходимо определить ее поведение после отказа и восстановления компонентов. Принимаются следующие допущения:

- 1) Любой i -й компонент системы, $i = \overline{1, n}$, может отказать и быть восстановлен. Неотказавшие компоненты продолжают нормально функционировать в течение этого процесса. По завершении ремонта восстановленный компонент возобновляет нормальную работу, и начинается восстановление следующего отказавшего компонента (если таковой имеется).
- 2) Отказ системы происходит при отказе любых k последовательных компонентов. Поскольку данное исследование фокусируется на функции надежности системы, восстановление системы после полного отказа не рассматривается. Следовательно, моделируется поведение системы только до ее первого отказа.
- 3) Динамика работы оставшихся компонентов после отказа системы не рассматривается и не включается в математическую модель.
- 4) После отказа системы текущее восстановление останавливается.

2.1. Обозначения и допущения

Пусть A_i , $i = 1, 2, \dots$, обозначают в.б.р. компонентов системы, а B_i , $i = 1, 2, \dots$, — продолжительности их восстановления. Предполагается, что эти случайные величины (с.в.) взаимно независимы и одинаково распределены (н.о.р.) для в.б.р. и восстановления соответственно. Для описания функции распределения (ф.р.) для каждого типа с.в. будем использовать соответствующую букву, опуская индекс.

Таким образом, их общие ф.р. обозначаются как $A(x) = \mathbb{P}\{A_i \leq x\}$ и $B(x) = \mathbb{P}\{B_i \leq x\}$ соответственно. Предполагается, что эти функции имеют соответствующие плотности распределения (п.р.) $a(x)$ и $b(x)$.

Пусть время жизни A подчиняется экспоненциальному распределению с интенсивностью α , $A \sim \text{Exp}(\alpha)$. Тогда среднее в.б.р. (т.е. МТТФ) компонента равно $\mu_A = \alpha^{-1}$.

Среднее время восстановления и ПЛ его п.р. обозначаются как

$$\mu_B = \int_0^\infty (1 - B(x)) dx < \infty, \quad \tilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} b(x) dx. \quad (1)$$

Кроме того, предполагается, что мгновенное восстановление невозможно, т.е. $B(0) = 0$, и с.в. времени восстановления имеет по крайней мере два конечных начальных момента. Пусть коэффициент вариации (CoV) времени восстановления равен $v_B = \frac{\sigma_B}{\mu_B} < \infty$, где σ_B — среднеквадратическое отклонение времени восстановления.

Пространство состояний исследуемой системы обозначается как $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, \dots, j, -k\}$, где

- 0 означает, что все компоненты системы функционируют исправно,
- 1 означает, что один компонент системы отказал и находится в процессе восстановления,
- i означает, что i непоследовательных компонентов из n (где $i = 2, 3, \dots, j$) отказали. Один из них восстанавливается, другие отказавшие компоненты ожидают восстановления, а остальные $(n - i)$ компонентов работоспособны.
- $-k$ означает, что k последовательных компонентов отказали, что привело к отказу всей системы.

Таким образом, макросостояние i объединяет все допустимые конфигурации, содержащие i отказавших компонентов, не содержащие кластера из k последовательных отказавших компонентов. Здесь j обозначает предельное состояние системы перед отказом, т.е. максимальное число не соседних отказавших компонентов, при котором новый отказ однозначно приводит к отказу системы:

$$j = \begin{cases} n - \frac{n}{k}, & \text{если } n \text{ кратно } k, \\ n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1, & \text{если } n \text{ не кратно } k. \end{cases}$$

Множество состояний $\mathbb{E}$ может быть представлено в виде двух подмножеств: $\mathbb{E}_0 = \{0, 1, 2, \dots, j\}$ представляет работоспособные состояния системы, а подмножество $\mathbb{E}_1 = \{-k\}$ представляет состояние отказа системы.

2.2. Постановка задачи

Введем случайный процесс $J = \{J(t), t \geq 0\}$, где $J(t) = i$, $i \in \mathbb{E}$, если система находится в состоянии i в момент времени t . Обозначим время жизни системы как $T = \{\inf t \geq 0 : J(t) \in \mathbb{E}_1\}$. Предполагается, что начальное состояние $J(0) = 0$.

Цель статьи — исследовать поведение процесса до его первого отказа и получить аналитические выражения для следующих характеристик процесса $J(t)$:

1. Зависящие от времени (переходные) вероятности состояний:

$$\pi_i(t) = \mathbb{P}\{J(t) = i\}, \quad i \in \mathbb{E}. \quad (2)$$

2. Функция надежности системы:

$$R(t) = \mathbb{P}\{T > t\} = 1 - \pi_{-k}(t). \quad (3)$$

3. Среднее в.б.р. системы (MTTF):

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty R(t) dt. \quad (4)$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И СИСТЕМА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГорова

3.1. Двумерный марковский процесс с дискретно-непрерывными компонентами

Немарковские системы с произвольными распределениями времени жизни и восстановления могут быть исследованы с помощью метода введения дополнительных переменных (так называемой марковизации) [15, 16]. Введение переменной, такой как истекшее время восстановления, в описание процесса преобразует исходный процесс в двумерный марковский процесс. Это позволяет использовать стандартные методы теории марковских процессов, в частности, для решения систем дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний и определения искомых характеристик надежности, включая функцию надежности $R(t)$ и среднее время жизни системы до отказа T [17].

Для того чтобы моделировать процесс $J(t)$ как марковский, несмотря на произвольное распределение времени восстановления, применяется метод дополнительных переменных. Для данной конкретной модели дополнительная переменная определяется как $X(t) \in \mathbb{R}_+$, которая обозначает истекшее время восстановления компонента, находящегося в обслуживании в момент времени t .

Следовательно, мы получаем двумерный марковский процесс $Z(t)$:

$$Z(t) = \{J(t), X(t)\}, \quad t \geq 0,$$

где $J(t)$ – это так называемое макросостояние системы в момент времени t (число отказавших компонентов), а $X(t)$ – истекшее время восстановления компонента, который в данный момент восстанавливается. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ истекшее время восстановления также равно нулю, так как ремонтное устройство простаивает.

Пространство состояний процесса $Z(t)$ тогда имеет вид $\bar{\mathbb{E}} = \{0, (i, x), -k \mid i \in \mathbb{E}_0 \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}_+\}$ с его микросостояниями, где:

- (0) означает, что ни один компонент системы не отказал;
- (i, x) означает, что $i = 1, 2, \dots, j$ непоследовательных компонентов системы отказали, и истекшее время восстановления для компонента, который в данный момент восстанавливается, равно x ;
- $(-k)$ означает, что k последовательных компонентов отказали (отказ системы);
- $(1, 0)$ означает, что один компонент системы отказал и его восстановление только что началось; или, один из двух непоследовательных отказавших компонентов был восстановлен (его истекшее время восстановления равно нулю), после чего немедленно начинается восстановление второго отказавшего компонента.

- $(i, 0)$ означает, что один из $i = 2, 3, \dots, j$ непоследовательных отказавших компонентов системы был восстановлен, и немедленно начинается восстановление другого отказавшего компонента.

Обозначим:

- $\pi_0(t) = \mathbb{P}\{J(t) = 0\}$ – вероятность того, что все n компонентов работоспособны в момент времени t ;
- $\pi_i(t, x)dx = \mathbb{P}\{J(t) = i, x < X(t) \leq x + dx\}$ ($i \in \mathbb{E}_0 \setminus \{0\}$) – плотность вероятности (по отношению к непрерывной компоненте x) для микросостояний, указывающих, что в момент времени t имеется i отказавших компонентов, причем один из них в данный момент восстанавливается с истекшим временем восстановления между x и $x + dx$;
- $\pi_{-k}(t) = \mathbb{P}\{J(t) = -k\}$ – вероятность отказа системы в момент времени t .

Предполагается, что плотности $\pi_i(t, x)$ существуют и позволяют вычислять зависящие от времени (нестационарные) вероятности макросостояний системы:

$$\pi_i(t) = \int_0^t \pi_i(t, x) dx. \quad (5)$$

Впоследствии вычисление таких вероятностей состояний будет представлено в терминах их ПЛ:

$$\tilde{\pi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t \pi_i(t, x) dx \right) dt. \quad (6)$$

3.2. Построение системы интегро-дифференциальных уравнений для двумерного марковского процесса

При построении агрегированного процесса используется метод обобщенных переходных вероятностей, предложенный в [18]. Каждому макросостоянию i соответствует M_i допустимых конфигураций отказавших компонентов. Интенсивности переходов между макросостояниями определяются усреднением интенсивностей переходов между соответствующими конфигурациями с учетом их условных вероятностей.

Пусть λ_i , $i \in \mathbb{E}_0$, обозначает интенсивность отказа компонента системы, когда система находится в состоянии i [4]:

$$\lambda_i = \begin{cases} n\alpha, & \text{если } i = 0, \\ \frac{(i+1)M_{i+1}}{M_i} \alpha \equiv \lambda_i^{(1)}, & \text{если } i \rightarrow i+1, i = \overline{1, j-1} \\ (n-j)\alpha, & \text{если } j \rightarrow -k, \\ \left((n-i) - \frac{(i+1)M_{i+1}}{M_i} \right) \alpha \equiv \lambda_i^{(-k)}, & \text{если } i \rightarrow -k, i = \overline{1, j-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь символ $\rightarrow$ указывает на переход из состояния слева в состояние справа. Очевидно, что $\lambda_i = \lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(-k)} = (n-i)\alpha$, $i = \overline{1, j-1}$, представляет собой общую интенсивность выхода из состояния i .

В приведенном выше выражении M_i обозначает количество способов разместить n компонентов по кругу, включая i отказавших и $(n-i)$ работоспособных, таких, что никакие k из i отказавших компонентов не являются последовательными (см., например, [18]).

Кроме того, пусть $\beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}$ обозначает интенсивность завершения восстановления отказавшего компонента при условии, что на его восстановление уже затрачено время x .

На Рис. 1 показана диаграмма интенсивностей переходов для исследуемого процесса $Z(t)$ с поглощением в состоянии $(-k)$ в пространстве состояний $\mathbb{E}$. Обратим внимание, что x является непрерывной компонентой. Поэтому переход $(i, x) \rightarrow (i - 1, 0)$ с интенсивностью $\beta(x)$ иллюстрирует “прогресс истекшего времени восстановления” для восстанавливаемого компонента, т.е. завершение восстановления. Стрелки для перехода $(i, 0) \rightarrow (i, x)$ изображают завершение предыдущего восстановления и начало нового восстановления в течение бесконечно малого интервала времени Δ .

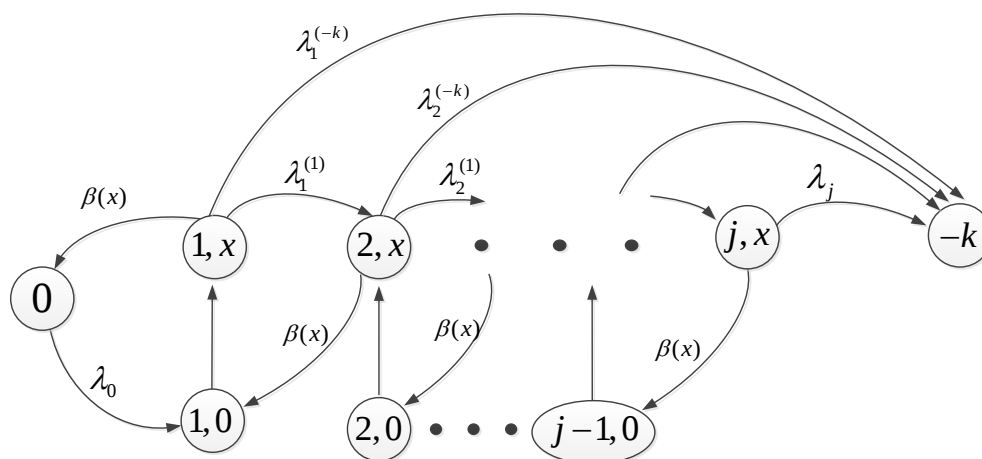


Рис. 1. Диаграмма интенсивностей переходов для двумерного марковского процесса $Z(t)$.

Замечание 1. Отметим, что когда $\lambda_i^{(-k)} = 0$ для $i = 1, \dots, j - 1$, модель соответствует классической системе $(j + 1)$ -из- n , отказ которой происходит при отказе любых $j + 1$ компонентов независимо от их взаимного расположения. Например, циклическая последовательная система 2-из-6 : F с $\lambda_i^{(-2)} = 0$, $i = 1, 2, 3$, соответствует классической системе 3-из-6 : F .

На основе представленной диаграммы переходов сформулируем систему интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных, описывающую двумерный марковский процесс $Z(t)$ с поглощением в состоянии $(-k)$ для системы $Cir/Con/k/n : F$, которая позволит вычислить временные характеристики надежности системы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_0(t) = -\lambda_0 \pi_0(t) + \int_0^t \beta(x) \pi_1(t, x) dx, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \pi_1(t, x) = -(\lambda_1 + \beta(x)) \pi_1(t, x), \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \pi_i(t, x) = -(\lambda_i + \beta(x)) \pi_i(t, x) + \lambda_{i-1}^{(1)} \pi_{i-1}(t, x), \quad i = \overline{2, j}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_{-k}(t) = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i^{(-k)} \int_0^t \pi_i(t, x) dx + \lambda_j \int_0^t \pi_j(t, x) dx, \quad (11)$$

при начальных условиях

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0, x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad \forall x \geq 0, \quad \pi_{-k}(0) = 0, \quad (12)$$

и граничных условиях

$$\pi_1(t, 0) = \lambda_0 \pi_0(t) + \int_0^t \beta(x) \pi_2(t, x) dx, \quad (13)$$

$$\pi_i(t, 0) = \int_0^t \beta(x) \pi_{i+1}(t, x) dx, \quad i = \overline{2, j-1}, \quad (14)$$

$$\pi_j(t, 0) = 0. \quad (15)$$

Замечание 2. Для вычисления нестационарных вероятностей состояний (5) процесса $Z(t)$ может быть построена аналогичная система дифференциальных уравнений, учитывающая возможные переходы из состояния отказа $-k$ обратно в одно из работоспособных состояний, т.е. восстановление. В рамках этой модели можно рассматривать различные стратегии и сценарии восстановления. Например, частичное восстановление, когда восстановление одного из отказавших компонентов возвращает систему в работоспособное состояние, в то время как остальные отказавшие компоненты продолжают ожидать восстановления. Альтернативой является стратегия полного восстановления, когда после отказа системы все поврежденные компоненты восстанавливаются, и система возобновляет работу в состоянии, эквивалентном начальному (как новая). Также могут представлять интерес модели с приоритетным обслуживанием, учитывающие различный порядок или интенсивности восстановления компонентов в зависимости от их критичности или местоположения, а также другие сложные стратегии технического обслуживания.

Замечание 3. Если учесть возможность восстановления в состоянии $-k$ и предполагая существование предельных вероятностей процесса $Z(t)$, которые эквивалентны его стационарным вероятностям, можно применить предельный переход $t \rightarrow \infty$ в уравнениях (8)-(15) для вывода соответствующих уравнений баланса. Решение такой системы позволяет вычислить стационарные вероятности системы, ее коэффициент готовности и другие стационарные показатели эффективности.

Процедура решения системы уравнений (8-15) для нахождения функции надежности системы $Cir/Con/k/n : F$ может быть аналогична представленной в работах [19, 20].

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В качестве примера беспилотного летательного аппарата рассмотрим гексакоптер. По оценке инженеров, такой БПЛА не может функционировать, если откажут по крайней мере два его соседних двигателя, так как это приведет к его наклону, потере управления и невозможности корректной дальнейшей работы. На Рис. 2 схематически показано расположение двигателей гексакоптера, пронумерованных от 1 до 6. Таким образом, гексакоптер становится неработоспособным, если, например, откажут двигатели 1 и 2, или 2 и 3, или 6 и 1, и так далее.

Для такой системы “отказ” можно интерпретировать как временную неисправность двигателя гексакоптера. Соответственно, “восстановление” относится к событию, которое возвращает двигатель из нерабочего состояния в исправное.

Для гексакоптера сценарий, соответствующий этому описанию, может включать перегрев двигателя с последующим автоматическим охлаждением. Хотя эта проблема менее распространена для полностью автономных БПЛА, она становится весьма актуальной для привязных платформ на основе мультикоптеров.

Основными факторами, способствующими перегреву двигателя в привязном мультикоптере, являются длительная работа без посадки и некачественная работа полетного контроллера.

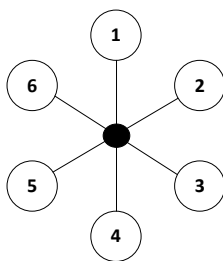


Рис. 2. Схематическое изображение гексакоптера с пронумерованными двигателями.

При правильно настроенном полетном контроллере и спокойных ветровых условиях двигатели могут работать в пределах своего номинального теплового режима в течение длительного времени, примерно от 50 до более 100 часов. Однако из-за порывов ветра, вибраций или износа подшипников один двигатель может начать перегреваться значительно раньше. Поэтому для инженерной оценки более реалистичным считается диапазон от 5 до 50 часов непрерывной работы.

Автоматическое охлаждение двигателей обеспечивается мощным принудительным потоком воздуха. Воздушный поток от других пропеллеров и набегающий поток воздуха (при наличии легкого ветра или дрейфа платформы) эффективно рассеивают тепло. Следовательно, согласно инженерным оценкам, время охлаждения от рабочей температуры (например, 120°C) до безопасного уровня для перезапуска (например, 60°C) при хорошем воздушном потоке может составлять от 30 секунд до 2 минут.

Таким образом, исходя из описания реальной системы, далее рассмотрим ее математическую модель как систему $Cir/Con/2/6 : F$.

4.1. Математическая модель работы гексакоптера и его функция надежности

Для модели $Cir/Con/2/6 : F$ пространство макросостояний имеет вид $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, 3, -2\}$, где $\mathbb{E}_0 = \{0, 1, 2, 3\}$ — подмножество работоспособных состояний, обозначающих число непрерывных отказавших компонентов, $j = 6 - \lfloor 6/2 \rfloor = 6 - 3 = 3$, а состояние -2 указывает на отказ системы.

Вычислим интенсивности отказов компонентов для всех состояний процесса, принадлежащих множеству $\mathbb{E}$. Согласно комбинаторным правилам, число M_i способов разместить по кругу n компонентов, среди которых i компонентов отказали, таким образом, чтобы никакие два отказавших компонента не являлись соседними равно

$$M_i = \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}. \quad (16)$$

Следовательно, получаем

$$\lambda_i = (n-i)\alpha, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \lambda_1^{(1)} = 3\alpha, \quad \lambda_2^{(1)} = \frac{2}{3}\alpha, \quad \lambda_1^{(-2)} = 2\alpha, \quad \lambda_2^{(-2)} = \frac{10}{3}\alpha.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений Колмогорова для системы $Cir/Con/2/6$: F принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -6\alpha\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t, x) dx, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t, x) = -(5\alpha + \beta(x))\pi_1(t, x), \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_2(t, x) = -(4\alpha + \beta(x))\pi_2(t, x) + 3\alpha\pi_1(t, x), \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_3(t, x) = -(3\alpha + \beta(x))\pi_3(t, x) + \frac{2}{3}\alpha\pi_2(t, x), \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt}\pi_{-2}(t) = 2\alpha \int_0^t \pi_1(t, x) dx + \frac{10}{3}\alpha \int_0^t \pi_2(t, x) dx + 3\alpha \int_0^t \pi_3(t, x) dx, \quad (21)$$

с начальными условиями

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0, x) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall x \geq 0, \quad \pi_{-2}(0) = 0, \quad (22)$$

и граничными условиями

$$\pi_1(t, 0) = 6\alpha\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t, x) dx, \quad (23)$$

$$\pi_2(t, 0) = \int_0^t \beta(x)\pi_3(t, x) dx, \quad (24)$$

$$\pi_3(t, 0) = 0. \quad (25)$$

Используя представленный в работах [19, 20] алгоритм, найдем решение уравнений (18)-(20) вдоль характеристик $t - x$:

$$\pi_1(t, x) = h_1(t - x)e^{-5\alpha x}(1 - B(x)), \quad (26)$$

$$\pi_2(t, x) = \left[h_2(t - x)e^{-4\alpha x} - 3h_1(t - x)e^{-5\alpha x} \right] (1 - B(x)), \quad (27)$$

$$\pi_3(t, x) = \left[h_3(t - x)e^{-3\alpha x} - \frac{2}{3}h_2(t - x)e^{-4\alpha x} + h_1(t - x)e^{-5\alpha x} \right] (1 - B(x)), \quad (28)$$

где $h_1(\cdot), h_2(\cdot), h_3(\cdot)$ – некоторые функции, подлежащие определению.

Применяя граничные условия (23)-(25) и переходя к ПЛ после подстановки $x = 0$ в уравнения (26)-(28), получаем:

$$\tilde{h}_1(s) = 6\alpha\tilde{\pi}_0(s)\tilde{K}(s), \quad (29)$$

$$\tilde{h}_2(s) = 3 \cdot \frac{3 - [\tilde{b}(s + 3\alpha) - \tilde{b}(s + 5\alpha)]}{3 - 2[\tilde{b}(s + 3\alpha) - \tilde{b}(s + 4\alpha)]} \tilde{h}_1(s), \quad (30)$$

$$\tilde{h}_3(s) = \frac{2}{3}\tilde{h}_2(s) - \tilde{h}_1(s), \quad (31)$$

где

$$K(s) = \left[1 + 3\tilde{b}(s + 5\alpha) - 3\tilde{b}(s + 4\alpha) \frac{3 - [\tilde{b}(s + 3\alpha) - \tilde{b}(s + 5\alpha)]}{3 - 2[\tilde{b}(s + 3\alpha) - \tilde{b}(s + 4\alpha)]} \right]^{-1}.$$

Решая уравнение (17) и подставляя (29), получаем

$$\tilde{\pi}_0(s) = \left[s + 6\alpha(1 - \tilde{b}(s + 5\alpha) \cdot K(s)) \right]^{-1}. \quad (32)$$

Таким образом, взяв ПЛ формул (26)-(28) и подставив (29)-(31), можно вычислить все остальные функции $\tilde{\pi}_i(s)$ и функцию надежности в терминах ее ПЛ:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(s) &= \frac{1}{s} - \tilde{\pi}_{-2}(s) = \\ &= \frac{1}{s} \left[1 - 2\alpha\tilde{\pi}_1(s) - \frac{10}{3}\alpha\tilde{\pi}_2(s) - 3\alpha\tilde{\pi}_3(s) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1(s) &= \tilde{h}_1(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + 5\alpha)}{s + 5\alpha}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= \tilde{h}_2(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + 4\alpha)}{s + 4\alpha} - 3\tilde{h}_1(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + 5\alpha)}{s + 5\alpha}, \\ \tilde{\pi}_3(s) &= \tilde{h}_3(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + 3\alpha)}{s + 3\alpha} - \frac{2}{3}\tilde{h}_2(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + 4\alpha)}{s + 4\alpha} + \tilde{h}_1(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + 5\alpha)}{s + 5\alpha}. \end{aligned}$$

Упрощая это выражение и переходя к пределу $s \rightarrow 0$, получаем среднее в.б.р. системы $\mathbb{E}[T]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \frac{99 - 71\tilde{b}(3\alpha) - 179\tilde{b}(4\alpha) + 181\tilde{b}(5\alpha) + 85\tilde{b}(3\alpha)\tilde{b}(4\alpha) - 124\tilde{b}(3\alpha)\tilde{b}(5\alpha) + 39\tilde{b}(4\alpha)\tilde{b}(5\alpha)}{60\alpha \left[3 - 2\tilde{b}(3\alpha) - 7\tilde{b}(4\alpha) + 6\tilde{b}(5\alpha) + 3\tilde{b}(3\alpha)\tilde{b}(4\alpha) - 4\tilde{b}(3\alpha)\tilde{b}(5\alpha) + \tilde{b}(4\alpha)\tilde{b}(5\alpha) \right]}. \end{aligned} \quad (34)$$

Замечание 4. Если с.в. B распределена экспоненциально с интенсивностью β , модель сводится к частному марковскому случаю. Тогда ее аналитические результаты согласуются с результатами, полученными непосредственно из уравнений баланса соответствующего процесса рождения и гибели. Например, при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, функция надежности и МТТФ для системы $Cir/Con/2/6 : F$ определяются следующим образом:

$$R(t) = 0.04147e^{-8.88248t} - 0.59884e^{-5.61223t} - 0.88211e^{-3.87652t} + 2.43948e^{-2.62877t}, \quad t \geq 0, \quad (35)$$

$$\mathbb{E}[T] = 0.598425. \quad (36)$$

4.2. Численная иллюстрация

Принимая во внимание представленные выше оценочные данные, близкие к реальным, о среднем в.б.р. и среднем времени восстановления двигателей гексакоптера, зададим $\mu_A = [5, 50]$ часов, а $\mu_B = 0.5$, 2 минуты или $\mu_B = 0.0083, 0.0333$ часа. Для каждой пары этих параметров готовность отдельного компонента (двигателя) очень высокая, $Availability = \frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} > 99\%$.

Предположим, что время восстановления подчиняется экспоненциальному распределению со средним μ_B . График функции надежности $R(t)$ представлен на Рис. 3. Цвет указывает значение среднего времени жизни μ_A , а тип линии соответствует среднему времени восстановления (сплошная для $\mu_B = 0.0083$, пунктирная для $\mu_B = 0.0333$). Средние времена жизни системы для этих значений параметров представлены в Таблице 1.

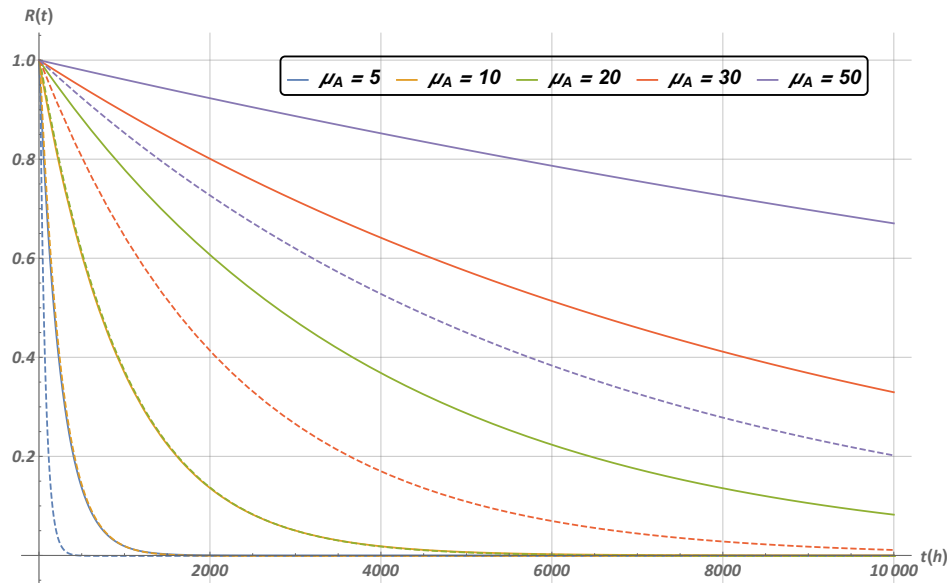


Рис. 3. Функция надежности $R(t)$ системы $Cir/Con/2/6 : F$ для различных параметров.

Очевидно, что большее в.б.р. одного компонента приводит к более высокой надежности всей системы (меньшему числу отказов), в то время как более медленный процесс восстановления (увеличение μ_B) снижает надежность.

Рассчитанные значения МТТФ системы соответствуют поведению функции надежности. Очевидно, что в контексте эксплуатации привязной высотной платформы на основе гексакоптера быстрое охлаждение двигателей, вышедших из строя из-за перегрева, является наиболее оптимальным сценарием, обеспечивающим длительную работу платформы. В то же время расчеты показывают, что более медленное восстановление может быть скомпенсировано действиями, направленными на предотвращение перегрева двигателей и минимизацию их времени до отказа.

Таблица 1. МТТФ системы $E[T]$ системы $Cir/Con/2/6 : F$ (в часах).

	$\mu_A = 5$	$\mu_A = 10$	$\mu_A = 20$	$\mu_A = 30$	$\mu_A = 50$
$\mu_B = 0.0083$	252.27	1006	4021	9044	25113
$\mu_B = 0.0333$	63.88	252.82	1006	2260	6268

На основе графических результатов можно сделать выводы о вероятности того, что система останется работоспособной в течение заданного интервала времени. В этом случае наибольший интерес представляют квантили надежности не ниже, чем готовность отдельного компонента $Availability \geq 0.99$. Поэтому рассмотрим квантили

$$q_\gamma = R^{-1}(\gamma) \quad (37)$$

для $\gamma = 0.99, 0.999$ (см. Таблицы 2 и 3).

Таблица 2. Квантили $q_{0.99}$ системы $Cir/Con/2/6 : F$ (в часах).

$q_{0.99}$	$\mu_A = 5$	$\mu_A = 10$	$\mu_A = 20$	$\mu_A = 30$	$\mu_A = 50$
$\mu_B = 0.0083$	2.53	10.08	40.26	90.54	251.39
$\mu_B = 0.0333$	0.67	2.57	10.13	22.72	62.97

Таблица 3. Квантили $q_{0.999}$ системы $Cir/Con/2/6 : F$ (в часах).

$q_{0.999}$	$\mu_A = 5$	$\mu_A = 10$	$\mu_A = 20$	$\mu_A = 30$	$\mu_A = 50$
$\mu_B = 0.0083$	0.26	1.01	4.01	9.02	25.03
$\mu_B = 0.0333$	0.09	0.29	1.04	2.29	6.29

Результаты позволяют оценить временной интервал, в течение которого система останется работоспособной с достаточно высокой вероятностью. Эти параметры имеют решающее значение для инженеров при выполнении критически важных задач, например, во время быстрого развертывания привязной высотной платформы в чрезвычайных ситуациях для обеспечения телекоммуникационного покрытия.

4.3. Анализ чувствительности

На практике технические параметры системы часто получают из технической документации, статистических данных или экспертных оценок. Это ставит нетривиальную задачу выбора их вероятностных распределений. Следовательно, оценка чувствительности показателей надежности системы к вариациям этих входных параметров является критически важной задачей. В стохастическом моделировании чувствительность означает устойчивость выходных показателей эффективности к изменениям входных данных. Разработка математических моделей, учитывающих неэкспоненциальные распределения в.б.р. или восстановления, частично мотивирована необходимостью изучения такой чувствительности.

Исследуем надежность гексакоптера, моделируемого как система $Cir/Con/2/6 : F$, с учетом неэкспоненциальных распределений времени восстановления.

Пусть μ_A остается неизменным, как в предыдущем случае. Как следует из предыдущего описания, время восстановления ограничено интервалом $[0.5, 2]$ минуты, т.е. среднее время восстановления составляет примерно 0.02 часа с $CoV v_B \approx 0.35$. Для времени восстановления выбираем наиболее часто используемые в теории надежности распределения: Гамма ($\Gamma(\alpha, \beta)$), Гнеденко-Вейбулла ($GW(\alpha, \beta)$) и равномерное ($U(a, b)$). Параметры этих распределений определяются фиксацией среднего μ_B и $CoV v_B$ следующим образом:

- Для Γ : параметр формы $\alpha = v_B^{-2}$ и параметр масштаба $\beta = \mu_B v_B^2$,
- Для GW : параметр формы α и параметр масштаба $\beta = \frac{\mu_B}{\Gamma(1+1/\alpha)}$, решается численно для заданного v_B ,
- Для U : $a = \mu_B - \sqrt{3}\mu_B v_B$, $b = \mu_B + \sqrt{3}\mu_B v_B$.

В Таблице 4 представлены рассчитанные значения МТТФ системы для выбранных распределений времени восстановления. Для сравнительных целей также включен случай $v_B = 1$ (экспоненциальное распределение, Exp). Результаты демонстрируют нечувствительность МТТФ к конкретной форме распределения времени восстановления и связанному с ним CoV . Несмотря на значительную разницу в значениях v_B (1 для Exp и 0.35 для других распределений), вычисленные значения m_T чрезвычайно близки. Это наблюдение подтверждает хорошо известный в теории надежности принцип: в условиях редких отказов и быстрого восстановления показатели надежности часто демонстрируют низкую чувствительность к форме распределения времени восстановления.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена математическая модель для анализа надежности привязного беспилотного летательного аппарата, структурная схема отказов двигателей которого описывается циклической последовательной системой $Cir/Con/k/n : F$ с экспоненциальным време-

Таблица 4. МТТФ системы $\mathbb{E}[T]$ системы $Cir/Con/2/6 : F$ (в часах) для различных распределений времени восстановления ($\mu_B = 0.02$ ч).

	$\mu_A = 5$	$\mu_A = 10$	$\mu_A = 20$	$\mu_A = 30$	$\mu_A = 50$
$Exp (v_B = 1)$	105.46	419.21	1671.71	3757.54	10429.2
$\Gamma (v_B = 0.35)$	105.43	419.18	1671.68	3757.52	10429.18
$GW (v_B = 0.35)$	105.43	419.18	1671.68	3757.52	10429.18
$U (v_B = 0.35)$	105.43	419.18	1671.68	3757.52	10429.18

нем жизни компонентов и произвольно распределенным временем их восстановления. Для аналитического исследования построен двумерный марковский процесс с дискретно-непрерывными компонентами, в котором в качестве дополнительной переменной выступает истекшее время восстановления отказавшего двигателя. В результате выведена система интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова. Практическая апробация модели на примере гексакоптера показала, что сокращение времени восстановления (охлаждения) двигателей существенно увеличивает надежность системы, при этом в условиях высокой готовности компонентов ($Availability > 99\%$) наблюдается низкая чувствительность показателей к форме распределения времени восстановления.

Разработанная модель и методология представляют собой универсальный инструмент для анализа надежности привязных БПЛА и других систем с циклической последовательной структурой отказов. Перспективные направления дальнейших исследований включают отказ от экспоненциального предположения для в.б.р. компонентов, расширение модели на системы с несколькими ремонтными устройствами и различными стратегиями восстановления, учет зависимых отказов и внешних воздействий, а также разработку эффективных вычислительных алгоритмов и методов машинного обучения для прогнозирования отказов в реальном времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rak J., Pickavet M., Trivedi K.S., Lopez J.A., Koster A.M.C.A., Sterbenz J.P.G., Çetinkaya E.K., Gomes T., Gunkel M., Walkowiak K., Staessens D. Future Research Directions in Design of Reliable Communication Systems. *Telecommunication Systems*, 2015, vol. 60, pp. 423–450.
2. Martynushev N.V., Malozyomov B.V., Sorokova S.N., Efremenkov E.A., Valuev D.V., Qi M. Review Models and Methods for Determining and Predicting the Reliability of Technical Systems and Transport. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 15, art. 3317.
3. Eryilmaz S. Review of Recent Advances in Reliability of Consecutive k -out-of- n and Related Systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 2010, vol. 224, pp. 225–237.
4. Kuo W., Zuo M.J. *Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications*. New York: Wiley, 2003.
5. Kozyrev D.V., Phuong N.D., Houankpo H.G.K., Sokolov A. Reliability Evaluation of a Hexacopter-Based Flight Module of a Tethered Unmanned High-Altitude Platform. In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds.). *Distributed Computer and Communication Networks*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 646–656.
6. Krishnamoorthy A., Sathian M.K., Narayanan Viswanath C. Reliability of a k -out-of- n System with Repair by a Single Server Extending Service to External Customers with Pre-emption. *Reliability: Theory & Applications*, 2016, vol. 11, no. 2(41), pp. 61–93.
7. Joseph B., Jose K.P. Reliability Analysis of a k -out-of- n Single Server System Extending Service to External Customers Under N -Policy and Server Vacations. In: Vishnevsky V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds.). *Distributed Computer and Communication Networks*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 15460. Cham: Springer, 2025, pp. 250–266.
8. Mittal N., Ivanova N., Jain V., Vishnevsky V. Reliability and Availability Analysis of High-Altitude Platform Stations Through Semi-Markov Modeling. *Reliability Engineering & System Safety*, 2024, art. 110419.

9. Rykov V., Ivanova N., Kozyrev D. Application of Decomposable Semi-Regenerative Processes to the Study of k -out-of- n Systems. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 16, art. 1933.
10. Sheu W.T., Sheu S.H., Liu T.H. et al. Optimal Replacement Policies for k -out-of- n Systems with Minimal Repairs and Mission Durations. *Annals of Operations Research*, 2025, published online. DOI: 10.1007/s10479-025-06602-y.
11. Amirian Y., Khodadadi A., Chatrabgoun O. Exact Reliability for a Consecutive Circular k -out-of- r -from- n :F System with Equal and Unequal Component Probabilities. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 2020, vol. 27, no. 1, art. 2050003.
12. Li M., Hu L., Peng R., Bai Z. Reliability Modeling for Repairable Circular Consecutive- k -out-of- n :F Systems with Retrial Feature. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, vol. 216, art. 107957.
13. Endharta A.J., Yun W.Y. A Preventive Maintenance of Circular Consecutive- k -out-of- n :F Systems. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 2017, vol. 34, no. 6, pp. 752–769.
14. Gao S., Wang J., Chen Q. Reliability Evaluation for a Circular Con/ k/n :F System With a Novel Differential Repair Policy. *IEEE Transactions on Reliability*, 2025, vol. 74, no. 3, pp. 3098–3111.
15. Cox D.R. The Analysis of Non-Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1955, vol. 51, pp. 433–441.
16. Kalashnikov V.V. Method of Supplementary Variables. In: *Mathematical Methods in Queuing Theory*. Mathematics and Its Applications, vol. 271. Dordrecht: Springer, 1994, pp. 163–182.
17. Kleinrock L. *Queueing Systems. Vol. 1: Theory*. New York: Wiley-Interscience, 1976.
18. Yam R.C.M., Zuo M.J., Zhang Y.L. A Method for Evaluation of Reliability Indices for Repairable Circular Consecutive- k -out-of- n :F Systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 2003, vol. 79, no. 1, pp. 1–9.
19. Rykov V., Kozyrev D., Filimonov A., Ivanova N. On Reliability Function of a k -out-of- n System with General Repair Time Distribution. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2021, vol. 35, no. 4, pp. 885–902.
20. Rykov V.V., Filimonov A.M. Hyperbolic Systems with Multiple Characteristics and Some Applications. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, pp. 1262–1270.

Reliability Modeling of a Tethered Multicopter as a Repairable Circular Consecutive k -out-of- n System

N. M. Ivanova

In this paper a mathematical model for reliability analysis of a tethered unmanned aerial vehicle is presented. The failure structure of its motors is described by a circular consecutive k -out-of- n :F system ($Cir/Con/k/n : F$). The model accounts for the arrangement of failed motors: the multicopter fails when a cluster of k consecutively located motors becomes inoperative. Motor lifetimes are assumed to be exponentially distributed, whereas repair times follow an arbitrary distribution. Using the supplementary variable method, a two-dimensional Markov process is constructed, and the corresponding system of Kolmogorov integro-differential equations is derived. Its solution makes it possible to calculate the system reliability function and mean time to failure. The model is illustrated using a hexacopter as an example. The sensitivity of the reliability measures to the shape of the repair time distribution is analyzed. The numerical results show that reducing the motor cooling time significantly improves system reliability. When component availability is high, the reliability measures are only weakly sensitive to the shape of the repair time distribution. The proposed model can be used to design fault-tolerant systems and plan maintenance procedures for tethered unmanned aerial vehicles.

KEYWORDS: circular consecutive k -out-of- n system, $Cir/Con/k/n : F$, reliability, arbitrarily distributed repair time, supplementary variable method, reliability function, mean time to failure, sensitivity analysis